Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 4 24. April 2001

Übungsgruppen:
Gruppe 1 (Zeinstra), Geom 432, am Freitag 11.45–13.15 Uhr,
Gruppe 2 (Kabel), Geom 435 am Freitag 12.30–14 Uhr.

2 Sei $D := \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \,]-\infty, 0]\}$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ ein Zweig der Potenzfunktion $z \to z^{1/2}$ mit $f(1) = -1$, d.h. $f : D \to \mathbb{C}$ ist die eindeutige stetige Funktion, für die gilt

(i) $(f(z))^2 = z$,

(ii) $f(1) = -1$.

Entwickeln Sie f als Potenzreihe im Punkte i, d.h. finden Sie ein $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\alpha(z) = f(i + z)$$

für alle $|z| < \varepsilon$.

Lösung:
Aus der reellen Analysis wissen wir für reelle $x \in]-1, 1[$

$$f(x+1) = -\sqrt{1+x} = -1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

mit

$$b_n := (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}.$$

Setze $\beta := \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$.
Es gilt $f(e^{it}x) = e^{it/2} f(x)$ für $t \in]-\pi, \pi[$ und $x > 0$ (klar für $t = 0$, für $t \neq 0$ folgt es aus der Stetigkeit von f und obigen Eigenschaften.
Somit gilt

$$f(i + ix) = f(i(1 + x)) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} f(1 + x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta(x),$$

also schließlich

$$f(i + z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta(-iz)$$

für alle **imaginären** z mit $|z| < 1$. Insbesondere ist $\rho(\beta) \geq 1$. Der Identitätssatz für analytische Funktionen besagt nun, dass

$$f(i + z) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \beta(-iz)$$

sogar für alle z mit $|z| < 1$ gilt.