Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 7 — 15. Mai 2001

Übungsgruppen:
Gruppe 1 (Zeinstra), Geom 432, am Freitag 11.45–13.15 Uhr,
Gruppe 2 (Kabel), Geom 435 am Freitag 12.30–14 Uhr.

1 Sei α_i die Potenzreihenentwicklung der folgenden holomorphen Funktionen f_i im Punkt z_i, d.h.

$$\alpha_i(z) = f_i(z_i + z).$$

(i) $f_1 : \mathbb{C} - \{3, 5i\} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-5i}$, $z_1 = 2 + 4i$,

(ii) $f_2 : \mathbb{C} - (\{3\} \cup \{-x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}) \to \mathbb{C}$, $f_2(z) = e^z \frac{1}{z-3} + \mathrm{Log}(z)$, $z_2 = 3/2 + i$.

Bestimmen Sie die Konvergenzradien von α_1 und α_2.
(*Tipp: Sie müssen die α_i nicht berechnen! Benutzen Sie den Satz über die Potenzreihenentwicklung (Satz 7.3 und Zusatz 7.5)*).

2 Beweisen Sie die folgende Version des Maximumprinzips: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet D und gibt es ein $z_0 \in D$ mit

$$\mathrm{Re} f(z) \leq \mathrm{Re} f(z_0) \quad \text{für alle } z \in D,$$

dann ist f notwendigerweise konstant.

3 Sei G ein Gebiet und sei $p \in G$ fest. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) G ist einfach zusammenhängend, d.h. jede Schleife ist homotop zu einer Punktkurve.

(2) Je zwei Kurven in G mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind homotop.

4 Sei $z = x + iy$. Untersuchen Sie, ob es eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ gibt, für die gilt:

(i) $u(x, y) = e^x (x \cos(y) - y \sin(y))$

(ii) $u(x, y) = (x + 1 - y)(x + 1 + y)e^x \cos(y) - (x + 1 - y)(x + 1 + y)$

und bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Funktion.

Abgabe: Dienstag, 22. Mai 2001 vor der Vorlesung
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppennummer auf Ihren Lösungen an.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`