Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 4 — 24. April 2001

Übungsgruppen:
Gruppe 1 (Zeinstra), Geom 432, am Freitag 11.45–13.15 Uhr,
Gruppe 2 (Kabel), Geom 435 am Freitag 12.30–14 Uhr.

1 Sei $f : U_1(0) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \overline{z}^{\nu}.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist wohldefiniert, d.h. die obige Reihe konvergiert auf $U_1(0)$

(b) Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

2 Sei $D := \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \,]-\infty, 0]\}$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ ein Zweig der Potenzfunktion $z \to z^{1/2}$ mit $f(1) = -1$, d.h. $f : D \to \mathbb{C}$ ist die eindeutige stetige Funktion, für die gilt

(i) $(f(z))^2 = z$,

(ii) $f(1) = -1$.

Entwickeln Sie f als Potenzreihe im Punkte i, d.h. finden Sie ein $\alpha \in \mathbb{C}[[X]]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\alpha(z) = f(i + z)$$

für alle $|z| < \varepsilon$.

3 Sei D ein Gebiet. Zeigen Sie: Sind f und g analytische Funktionen auf D und gilt $f \cdot g \equiv 0$, dann folgt entweder $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$.

4 Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $D := \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \,]-\infty, 0]\}$. Wir definieren $f : D \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = (\sin \operatorname{Log}(z))^5 + 6\,(\sin \operatorname{Log}(z))^2 + 8\,(\sin \operatorname{Log}(z))\,.$$

Zeigen Sie: Es gibt keine analytische Funktion $g : U_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U_\varepsilon(0) \cap D$.
Tipp: Konstruieren Sie eine Folge $a_n \in D$, mit $a_n \to 0$ und $f(a_n) = 0$ und nutzen Sie Satz 4.8 aus der Vorlesung.

Abgabe: Freitag, 4. Mai 2001 in der Übungsgruppe
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`