Übungen zur Vorlesung „Funktionentheorie 1“ im SS 2001

Blatt 2 — 10. April 2001

Übungsgruppen:
Gruppe 1 (Zeinstra), Geom 432, am Freitag 11.45–13.15 Uhr,
Gruppe 2 (Kabel), Geom 435 am Freitag 12.30–14 Uhr.

1 Welche der folgenden Teilmenge von $\mathbb{C}$ sind kompakt?

(a) $A_1 := \left\{z \,\middle|\, z^2 = 1\right\}$ $\qquad A_2 := \left\{z \,\middle|\, |z| = 1\right\}$

$A_3 := \left\{z \,\middle|\, |z| \leq 1\right\}$ $\qquad A_4 := \left\{z \,\middle|\, |z| < 1\right\}$

$A_5 := \left\{z \,\middle|\, |z| \geq 1\right\}$ $\qquad A_6 := \left\{z \,\middle|\, |z| > 1\right\}$

(b) $A_7 := \left\{z = x + iy \,\middle|\, 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 5\right\}$

$A_8 := \left\{z = x + iy \,\middle|\, 7x^8 + x^5 + 8x^3 + 2 = 4y^4 + y^3 + y + 3\right\}$

2 Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomporph?

(a) $f(z) = 16z^5 + z^3 + z$

(b) $f(x + iy) = e^x \sin y - ie^x \cos y$

(c) $f(x + iy) = e^x \sin y + ie^x \cos y$

(d) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$

3 Zeigen Sie an Hand der Definition holomorpher Funktionen, dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

eine holomorphe Funktion ist, d.h. zeigen Sie, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{z+h} - \dfrac{1}{z} - \left(-\dfrac{1}{z^2}\right) \cdot h}{h} = 0.$$

4

(a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $z \in D$ komplex differenzierbare Funktionen, so sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ komplex differenzierbar in z und es gilt

(i) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ (*Summenregel*)

(ii) $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$ (*Differenzenregel*)

(iii) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ (*Produktregel*)

(b) Seien $D, \widetilde{D} \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie die *Kettenregel*:
Ist $g : D \to \widetilde{D}$ komplex differenzierbar in $z \in D$ und ist $f : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $g(z)$, so ist auch $f \circ g : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z und es gilt

$$(f \circ g)'(z) := f'(g(z)) \cdot g'(z).$$

(c) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie die *Quotientenregel*:
Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $z \in D$ komplex differenzierbare Funktionen und gilt $g(z_1) \neq 0$ für alle $z_1 \in D$, so ist auch f/g komplex differenzierbar in z und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) := \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g(z)^2}.$$

Abgabe: Dienstag, 17. April 2001 zu Beginn der Vorlesung
Bitte geben Sie Ihren Namen auf ihren Lösungen an.
`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`