Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär

Blatt 10 — 28. Juni 1999

---

1 Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume, $p \in X$ und $q \in Y$. Zeigen Sie, daß

$$\pi_1\big(X \times Y, (p,q)\big) \cong \pi_1(X,p) \times \pi_1(Y,q)\ ,$$

wobei unter dem Gruppenisomorphismus für eine Schleife $c = (c_1, c_2)\colon I \to X \times Y$ die Klasse $[(c_1, c_2)] \in \pi_1\big(X \times Y, (p,q)\big)$ gerade dem Element $\big([c_1],[c_2]\big) \in \pi_1(X,p) \times \pi_1(Y,q)$ entspricht.

2 Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume, $p \in X$ und $q \in Y$. Zwei stetige Abbildungen $f,\, g\colon X \to Y$ mit $f(p) = g(p) = q$ heißen *homotop* (relativ zu p und q), falls es eine stetige Abbildung (*Homotopie*) $H\colon X \times [0,1] \to Y$ gibt mit

$$\begin{array}{clcllcl} (i) & H(x,0) & = & f(x) & \forall x & \in & X\ , \\ (ii) & H(x,1) & = & g(x) & \forall x & \in & X\ , \\ (iii) & H(p,t) & = & q & \forall t & \in & [0,1]\ . \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, daß für relativ zu p und q homotope Abbildungen $f,\, g\colon X \to Y$ die induzierten Abbildungen für die Fundamentalgruppen übereinstimmen:

$$f_* = g_*\colon \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)\ .$$

Man nennt (X,p) und (Y,q) *homotopieäquivalent*, falls es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, so daß $f(p) = q$, $g(q) = p$, $g \circ f$ homotop zu id_X (relativ zu p) und $f \circ g$ homotop zu id_Y (relativ zu q).

(b) Zeigen Sie, daß $(B^n, 0)$ und $(\{0\}, 0)$ homotopieäquivalent sind, wobei B^n der abgeschlossene Ball vom Radius 1 mit Mittelpunkt 0 im $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß homotopieäquivalente Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben.

3 Man nennt eine Überlagerung $\varphi\colon \widetilde{M} \to M$ *k-fach* oder *k-blättrig*, falls $\varphi^{-1}(y)$ für alle $y \in M$ genau k Elemente enthält, mit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Konstruieren Sie eine k-fache Überlagerung

$$\varphi\colon \widetilde{M} \to T^n \ .$$

(b) Konstruieren Sie eine zweifache Überlagerung

$$\varphi\colon \widetilde{M} \to M \ ,$$

wobei M das (abgeschlossene) Möbiusband ist.

Dabei sei $\widetilde{M}$ stets zusammenhängend!

4 Beweisen Sie: $\pi_1(\mathbb{R}P^n, p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $n \geq 2$. *Hinweis:* Benutzen Sie Weg- und Homotopieliftungseigenschaft für die Überlagerung $S^n \to \mathbb{R}P^n$, sowie die Tatsache, daß S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist. Betrachten Sie die beiden Fälle, daß ein geschlossener Weg in $\mathbb{R}P^n$ sich zu einem geschlossenen Weg in S^n liftet oder nicht.

Abgabe: Montag, **5.Juli 1999** in der Vorlesung

`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`