Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär

Blatt 9 21. Juni 1999

---

1 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Für $p \in M$ setzt man

$$(\Delta f)(p) := -\mathrm{Spur}\,\mathrm{Hess}_p f = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}_p f(e_i, e_i)\ ,$$

wobei $e_i, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist. Man nennt Δ den *Laplace-Operator*. Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa \cdot g$ für $\kappa \in \mathbb{R}$, so erfüllt die Abstandsfunktion d_p auf $M - \big(\{p\} \cup C_p\big)$ die Differentialungleichung

$$\Delta d_p \geq -(n-1)\,\mathrm{ct}_\kappa \circ d_p\ ,$$

wobei $\mathrm{ct}_\kappa = \frac{s'_\kappa}{s_\kappa}$.

2 Sei g eine vollständige Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^2$ und $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die zugehörige Gauß-Krümmung. Für $r > 0$ sei B_r die euklidische Kreisscheibe vom Radius r, $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{r\to\infty} \left(\inf_{q \in \mathbb{R}^2 - B_r} K(q) \right) \leq 0.$$

(b) Geben Sie eine vollständige Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{R}^2$ mit $K > 0$ an und überprüfen Sie (a) in diesem Beispiel.

3 Ein *geodätisches Dreieck* in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist ein Tripel $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ von Geodätischen $\gamma_i : [0, l_i] \to M$ mit $\gamma_{i+1}(0) = \gamma_i(l_i)$, wobei i modulo 3 zu nehmen ist. Die zugehörigen Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind gegeben durch $\alpha_i := \measuredangle\Big(-\dot\gamma_{i+1}(l_{i+1}), \dot\gamma_{i+2}(0)\Big)$. Bestimmen Sie für $M = H^2$, $\mathbb{R}^2$ und S^2 mit der jeweiligen Standardmetrik konstanter Krümmung $K = -1$, 0 bzw. 1 das Infimum und das Supremum von

$$\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mid (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ sind die Winkel eines geodätischen Dreiecks in } M\}\ .$$

4 Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq 0$. Sei $\gamma_1 : [0,\infty) \to M$ ein geodätischer Strahl und sei $\gamma_2 : [0,\infty) \to M$ weitere Geodätische mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(0)$ und $\measuredangle(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)) < \pi/2$. Außerdem wollen wir annehmen, daß jede Geodätische, die durch den Punkt $\gamma_1(0)$ geht, keine konjugierten Punkte besitzt.

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{t\to\infty} d\Big(\gamma_2(0), \gamma_2(t)\Big) = \infty.$$

Hinweis: Verbinden Sie γ_1 und γ_2 durch eine geeignete geodätische Variation und wenden Sie einen Rauchschen Vergleichssatz auf die resultierenden Jacobifelder an.

(b) Gilt (a) auch noch im Fall $\measuredangle\Big(\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0)\Big) = \pi/2$?

Abgabe: Montag, **28. Juni 1999** in der Vorlesung