Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär
Blatt 8 14. Juni 1999

---

1 Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$, trage die Standardmetrik konstanter Schnittkrümmung 1. Sei $p \in \mathbb{R}P^n$.

Zeigen Sie, daß C_p eine Untermannigfaltigkeit isometrisch zu $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist. Vergleichen Sie $\mathrm{injrad}(p)$ mit $\mathrm{diam}(\mathbb{R}P^n)$.

2 Seien M und N vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, seien $p \in M$ und $q \in N$. Zeigen Sie, daß der Schnittort von $(p,q) \in M \times N$ gegeben ist durch

$$C_{(p,q)} = (C_p \times N) \cup (M \times C_q)\,.$$

3 Sei M eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$. Wir definieren $d_p\colon M \to \mathbb{R}$ durch $d_p(q) := d(p,q)$. Zeigen Sie:

(a) d_p ist C^∞ auf $M \setminus (\{p\} \cup C_p)$, und dort gilt

$$\|\mathrm{grad}\ d_p\| = 1\,.$$

(b) Die Funktion $f = \frac{1}{2} d_p^2$ ist C^∞ auf $M \setminus C_p$, und dort gilt

$$\|\mathrm{grad}\ f\| = d_p\,.$$

4 Sei $c : [0,\pi] \to S^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, ein Halbkreis, der den Nordpol $p = (1,0,0)$ und den Südpol $q = (-1,0,0)$ verbindet. Setze $A := \mathrm{Bild}(c) \subset S^2$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine C^∞-Funktion $f : S^2 \to \mathbb{R}$ mit

- $f \geq 1$ überall
- $f(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in A$
- In allen Punkten $x \in A$ verschwinden die ersten und zweiten Ableitungen von f (bezüglich beliebiger lokaler Koordinaten).

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für A' statt für A, wobei A' ein ganzer Großkreis ist.

(b) Sei g_0 die Standardmetrik von S^2. Wir definieren eine neue Riemannsche Metrik durch $g := f \cdot g_0$. Zeigen Sie, daß bezüglich g der Halbkreis c **eindeutige** Kürzeste von p nach q ist und daß π konjugiert zu 0 ist längs c. *Hinweis*: Sei dürfen die Formeln aus Kapitel 1, Abschnitt J, im Buch von A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, benutzen.

Abgabe: Montag, **21. Juni 1999** in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`