Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär
Blatt 6 — 17. Mai 1999

---

1 Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit. Sei s der durch lokale Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ gegebene lokale Rahmen von TM. Drücken Sie die Krümmungsform Ω von ∇ bezüglich s durch die Komponenten R^l_{kij} des Riemannschen Krümmungstensors bezüglich der Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ aus.

2 Sei $G \subset \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie, daß falls G abelsch ist, die Lie-Klammer $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ auf $\mathfrak{g}$ verschwindet.

3 Berechnen Sie

(a) auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit positiv orientierten kartesischen Koordinaten x, y, z:

$$* \, d * (xyz\, dx), \quad d * d * (\sinh(x)\, dx \wedge dy)\,,$$
$$* \, d * d * \left(\sin\left(\cos\left(\sinh\left(\cosh\left(\log\left(1 + x^2\right)\right)\right)\right)\right)\right).$$

(b) auf dem 4-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{R}^4$ mit positiv orientierten Koordinaten t, x, y, z, bezüglich derer die Metrik die Gestalt $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ hat:

$$* \left(d(x\, dy \wedge dz) \wedge dt\right), \quad * \, d *^3 \left(e^{x^2+y^2+z^2} \cdot dt \wedge dx\right),$$
$$* \, d * d(xyzt).$$

4 Es trage S^2 die Standardmetrik konstanter Schnittkrümmung 1. Sei $E \to \mathbb{C}P^1 = S^2$ das tautologische komplexe Geradenbündel. Wir nennen einen lokalen glatten Schnitt s in E *normiert*, falls für alle p aus dem Definitionsbereich gilt

$$s(p) = (p, v(p)) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \qquad \text{mit} \quad \|v(p)\| = 1.$$

(a) Zeigen Sie, daß die normierten glatten Schnitte in E eine $U(1)$-Struktur auf E bilden.

(b) Für einen Schnitt s in E, $s(p) = (p, v(p))$, definieren wir $\nabla_X s := (p, \langle \partial_X v, p\rangle \cdot p)$ für $X \in T_p\mathbb{C}P^1$. Zeigen Sie, daß ∇ ein $U(1)$-Zusammenhang auf E ist.

(c) Sei Ω die Krümmungsform von ∇ bezüglich eines lokalen $U(1)$-Rahmens. Zeigen Sie, daß Ω überhaupt nicht von der Wahl des Rahmens abhängt und damit eine auf ganz S^2 wohldefinierte $i \cdot \mathbb{R}$-wertige 2-Form bildet.

(d) Berechnen Sie $\int_{S^2} \frac{1}{i}\, \Omega$.

Abgabe: Montag, **7. Juni 1999** in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`