Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär
Blatt 4 3. Mai 1999

Übungsgruppe:
dienstags, 13–15 Uhr, SR 218, Eckerstr. 1

1 Geben Sie einen nicht flachen Zusammenhang auf einem reellen Geradenbündel an.

2 Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage: Die äußere Ableitung von 0-Formen $\in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ entspricht dem Gradienten, die von 1-Formen $\in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ der Rotation und die von 2-Formen $\in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ der Divergenz.

3 Sei $E \to M$ ein reelles Vektorbündel. Wir wissen bereits, daß lokal stets ein sogenannter *Rahmen* existiert, d. h. ein Tupel $s = (s_1, \ldots, s_N)$ glatter Schnitte, die in jedem Punkt x aus dem Definitionsbereich eine Basis von E_x bilden. Zu einem Zusammenhang ∇ auf E und einem Rahmen s, definiert auf $U \subset M$, definiere ω_i^j durch

$$\nabla_X s_i = \sum_{j=1}^{N} \omega_i^j(X) s_j.$$

Zeigen Sie

(a) Die ω_i^j sind glatte 1-Formen auf U. Bem.: Die matrixwertige 1-Form $\omega = (\omega_i^j)_{i,j=1,\ldots,N}$ heißt *Zusammenhangsform* von ∇ bezüglich s.

(b) Ist $\tilde{s}$ ein anderer Rahmen, definiert auf U, $s_i = \sum_j \alpha_i^j \tilde{s}_j$, $\alpha = (\alpha_i^j) : U \to GL(N)$ glatt, so gilt für die zugehörige Zusammenhangsform

$$\tilde{\omega}(X) = -\alpha^{-1} \cdot \partial_X \alpha + \alpha^{-1} \cdot \omega(X) \cdot \alpha, \qquad \forall X \in TU.$$

(c) Was hat, im Falle des Levi-Civita-Zusammenhangs auf TM, die Zusammanhangsform mit den Christoffelsymbolen zu tun?

(d) Es gilt

$$\nabla_X \left(\sum_{i=1}^{N} f_i s_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\partial_X f_i + \sum_{j=1}^{N} f_j \omega_j^i(X) \right) s_i$$

und ∇ ist auf U durch ω eindeutig festgelegt.

4 Seien $E_1 \to M$ und $E_2 \to N$ reelle Vektorbündel, sei $f : M \to N$ glatt und sei $F : E_1 \to E_2$ ein Vektorbündelhomomorphismus über f, der faserweise ein linearer Isomorphismus sein soll. Sei ferner ∇ ein Zusammenhang auf E_2.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau einen Zusammenhang $F^*\nabla$ auf E_1, s. d. für alle $X \in TM$ und $s \in C^\infty(M, E_2)$ gilt

$$(F^*\nabla)_X \left(F^{-1} \circ s \circ f\right) = F^{-1} \nabla_{df(X)} s.$$

(b) Ist $s = (s_1, \ldots, s_N)$ ein lokaler Rahmen von E_2 auf $U \subset N$, so ist

$$t = (F^{-1} \circ s_1 \circ f, \ldots, F^{-1} \circ s_N \circ f)$$

ein lokaler Rahmen von E_1 auf $f^{-1}(U)$. Sei ω_2 die Zusammenhangsform von ∇ bezüglich s und ω_1 diejenige von $F^*\nabla$ bezüglich t. Zeigen Sie

$$\omega_1 = f^*\omega_2,$$

d. h. ${\omega_1}_i^j = f^* {\omega_2}_i^j$.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Eindeutigkeit in (a) und die Aussage (b), anschließend die Existenz in (a).

Abgabe: Montag, 10. Mai 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`