Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär
Blatt 2 19. April 1999

Übungsgruppe:
dienstags, 13–15 Uhr, SR 218, Eckerstr. 1

Ausnahme
Übungsgruppe diese Woche verlegt auf Freitag, 23.4.1999, 14 Uhr (c.t.), SR 403, Eckerstr. 1
ab 27.4. dann wieder dienstags

1 Sei N eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß M mit der induzierten Riemannschen Metrik (1. Fundamentalform) ebenfalls vollständig ist.

2 Weisen Sie die Vollständigkeit des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes nach.

3 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Geodätische $\gamma : [0, \infty) \to M$ mit $\dot{\gamma}(0) \neq 0$ heißt *geodätischer Strahl*, falls für alle $t \geq 0$ gilt

$$d\big(\gamma(0), \gamma(t)\big) = L\big[\gamma|_{[0,t]}\big].$$

Zeigen Sie:

(a) Der geodätische Strahl ist die kürzeste Verbindung von je zwei seiner Punkte, d. h.

$$d\big(\gamma(s), \gamma(t)\big) = L\big[\gamma|_{[s,t]}\big] \qquad \forall t \geq s \geq 0.$$

(b) Ist M vollständig und nicht kompakt, so gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ einen geodätischen Strahl mit $\gamma(0) = p$.

(c) Ist M kompakt, so gibt es keine geodätischen Strahlen.

4 Seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $p \in M$ und $X \in T_pM$ gilt:

$$\|d_pf(X)\| \leq C \cdot \|X\|.$$

(a) Zeigen Sie: Ist N vollständig, so auch M.

(b) Geben Sie ein Beispiel, in dem M vollständig ist, aber N nicht.

Abgabe: Montag, 26. April 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`