Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie II“
SS 1999 bei Prof. C. Bär

Blatt 1 | 12. April 1999

Übungsgruppe:
dienstags, 13–15 Uhr, SR 218, Eckerstr. 1

Ausnahme
1. Übungsgruppe: Freitag, 23.4.1999, 14 Uhr (c.t.), SR 403, Eckerstr. 1
ab 27.4. dann immer dienstags

1 Sei $M = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ die Zylinderfläche mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Riemannschen Metrik (1. Fundamentalform). Sei γ eine Geodätische in M. Berechnen Sie die Menge aller Jacobifelder längs γ und skizzieren Sie eine Basis für diesen Vektorraum.

2 Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d, und sei $c\colon [a, b] \to M$ eine C^1-Kurve. Zeigen Sie:

$$|\dot{c}(t)| = \lim_{h \to 0} \frac{d\big(c(t + h), c(t)\big)}{|h|}$$

für $a \leq t \leq b$.

3 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $F\colon (a, b) \times (c, d) \to M$ eine glatte Abbildung, deren Differential überall maximalen Rang hat, und so, daß für alle festen $s \in (a, b)$ die Kurve $t \to F(s, t)$ eine Geodätische ist. Beweisen Sie folgende Ungleichung für die Gauß-Krümmung K^F des Flächenstücks F und die Schnittkrümmung K^M von M:

$$K^F(s, t) \leq K^M\big(d_{(s,t)}F \cdot \mathbb{R}^2\big) .$$

Dies verallgemeinert die Ungleichung $K^F \leq 0$ für Regelflächen im $\mathbb{R}^3$. *Hinweis:* Die Eigenschaften von F liefern ein Vektorfeld V tangential an F, das sowohl für F als auch für M ein Jacobifeld ist. Berechnen Sie $\frac{d^2}{dt^2}\langle V, V\rangle$ in F und in M.

4 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, γ eine Geodätische in M. Sei V ein Jacobifeld längs γ. Zeigen Sie, daß es eine geodätische Variation von γ gibt, deren Variationsfeld gerade V ist. *Hinweis:* Hat V die Anfangswerte $V(t_0) = X$ und $\frac{\nabla}{dt}V(t_0) = Y$, so wählen Sie eine Kurve α durch $\gamma(t_0)$ mit $\dot{\alpha}(0) = X$ und überlegen Sie, welche Geodätische mit Anfangspunkt $\alpha(s)$ Sie betrachten müssen.

Abgabe: Montag, 19. April 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`