Etwas Topologie

Handout zur Vorlesung Differentialgeometrie, WS 1998/99
Prof. Dr. Christian Bär

Literatur

Abraham, Marsden, **Foundations of Mechanics**, Addison Wesley 1978, Seiten 3–17
(Bitte leihen Sie dieses Buch in den ersten 4 Wochen des Semesters nicht aus!)

Definition. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge ist und $\mathcal{O}$ eine Menge von Teilmengen von X, so daß folgende Axiome gelten

i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,

ii) $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$,

iii) $U_j \in \mathcal{O}$ für $j \in J$, J beliebige Indexmenge $\quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{O}$.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Teilmengen* von X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement offen ist, d. h. $X - A \in \mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ selbst heißt *Topologie* von X.

Beispiele.

1.) X beliebige Menge, $\mathcal{O} =$ Potenzmenge von X, d. h. jede Teilmenge von X ist offen. $\mathcal{O}$ heißt dann *diskrete Topologie* auf X.

2.) X beliebige Menge, $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{O}$ heißt dann *Klumpentopologie*.

3.) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = \{U \subset \mathbb{R} \,|\, \forall x \in U\, \exists r > 0 \text{ s. d. } B_r(x) \subset U\}$. Dabei ist $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ der offene Ball um x von Radius r. $\mathcal{O}$ ist die *Standardtopologie* des $\mathbb{R}^n$.

4.) $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum, $Y \subset X$ Teilmenge. Dann heißt $\mathcal{O}_Y = \{U \cap Y \,|\, U \in \mathcal{O}\}$ *Teilraumtopologie* von Y (oder auch *Relativtopologie*).

5.) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Die *Produkttopologie* von $X \times Y$ ist definiert durch

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subset X \times Y \,|\, \exists V_i \in \mathcal{O}_X, \quad W_i \in \mathcal{O}_Y \text{ s. d. } U = \bigcup_i V_i \times W_i \right\}.$$

6.) Sei $(x, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, sei „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann trägt die Menge aller Äquivalenzklassen $X/\sim\, = \{[x] \,|\, x \in X\}$ die *Quotiententopologie* $\widetilde{\mathcal{O}}$, die folgendermaßen definiert ist: Sei $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$, die Abbildung, die jedem Element seine Äquivalenzklasse zuordnet. Dann ist $\widetilde{\mathcal{O}} := \left\{ U \subset X/\sim \,\middle|\, \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O} \right\}$.

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$. Dann heißt

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U$$

das *Innere* von Y und

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschl.} \\ A \supset Y}} A$$

der *Abschluß* von Y (bzgl. X).

Bemerkung. $\overset{\circ}{Y}$ ist offen, $\overline{Y}$ ist abgeschlossen.

Beispiele.

1.) $X = \mathbb{R}$ (mit Standardtopologie), $Y = [0, 1)$.
$\overset{\circ}{Y} = (0, 1)$, $\overline{Y} = [0, 1]$.

2.) $X = [0, \infty)$ (mit der Teilraumtopologie, die durch die Standardtopologie von $\mathbb{R}$ induziert wird), $Y = [0, 1)$.
$\overset{\circ}{Y} = [0, 1)$, $\overline{Y} = [0, 1]$.

Definition. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge ist und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgenden Axiomen genügt:

i) $d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$,

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung),

jeweils für alle $x, y, z \in X$.

Außerdem heißt $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ der *offene Ball* um x von Radius r.

Bemerkung. Aus den Axiomen folgt $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$. (Wie?)

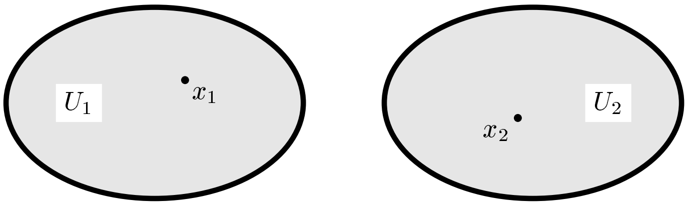
Bemerkung. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so bildet

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subset X \mid \exists r_i > 0 \; \exists x_i \in X \text{ s. d. } U = \bigcup_i B_{r_i}(x_i) \right\}$$

die induzierte Topologie auf X.

Beispiel. Für $X = \mathbb{R}^n$ und $d(x, y) = \|x - y\|$ ist die induzierte Topologie gerade die Standardtopologie.

Definition. Ein topologischer Raum heißt *Hausdorff-Raum*, falls es für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ offene Mengen $U_i \in \mathcal{O}$ gibt mit $x_i \in U_i$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Verschiedene Punkte können also durch offene Mengen getrennt werden.



Beispiele.

1.) Jede Menge mit diskreter Topologie ist ein Hausdorff-Raum (setze $U_i := \{x_i\}$).

2.) Eine Menge mit mindestens 2 Elementen mit der Klumpentopologie ist kein Hausdorff-Raum.

3.) Jeder metrische Raum ist hausdorffsch (setze $U_i = B_r(x_i)$ mit $r = (1/2)\, d(x_1, x_2)$).

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *Umgebung* von x, falls es ein $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in U$ und $U \subset Y$.

Beispiel. Für $X = \mathbb{R}$ ist $[-1,1]$ eine Umgebung von 0, denn $0 \in (-1,1) \subset [-1,1]$ und $(-1,1)$ ist offen.

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Wir sagen, die Folge $(x_i)_i$ *konvergiert* gegen x, $\lim_{i\to\infty} x_i = x$, falls für jede Umgebung V von x ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $x_i \in V$ für alle $i \geq n$. Der Punkt x heißt dann *Grenzwert* der Folge $(x_i)_i$.

Beispiele.

1.) Trägt X die Klumpentopologie, so konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt. I. a. sind Grenzwerte also nicht eindeutig.

2.) Trägt X die diskrete Topologie, so konvergieren nur solche Folgen, die ab einem Index konstant sind.

Bemerkung. In einem Hausdorff-Raum sind Grenzwerte eindeutig.

Lemma 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Dann konvergiert die Folge $(x_i)_i$ genau dann gegen x, wenn folgendes ε-Kriterium erfüllt ist:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ s. d. } d(x_i, x) < \varepsilon \qquad \forall i \geq n.$$

Beweis. Folgt direkt aus den Definitionen. □

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_i)_i$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ s. d. } d(x_i, x_j) < \varepsilon \qquad \forall i, j \geq n.$$

Bemerkung. Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Definition. Ist umgekehrt in einem metrischen Raum auch jede Cauchy-Folge konvergent, so heißt der Raum *vollständig*.

Beispiele.

1.) $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie ist vollständig.

2.) $\mathbb{Q}$ mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ist nicht vollständig, denn jede reelle Zahl, auch jede irrationale, ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen (z. B. Dezimalbruchentwicklung). Solche Folgen sind Cauchy-Folgen, da sie in $\mathbb{R}$ konvergieren, haben aber keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ heißt *offene Überdeckung* von X, falls

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Beispiel. $\mathcal{U} = \{(k-1, k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine offene Übedeckung von $\mathbb{R}$.

Definition. Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von $\mathcal{U}$ von X eine endliche (!) Teilmenge $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ besitzt, die X immer noch überdeckt.

Vorsicht. Die Bedingung ist nicht die, daß X eine endliche offene Überdeckung besitzt. Das ist immer erfüllt, z. B. $\mathcal{U} = \{X\}$. Die Bedingung besagt, daß man bei jeder offenen Überdeckung alle bis auf endlich viele Mengen weglassen kann und X immer noch ganz überdeckt wird.

Beispiele.

1.) $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn z. B. zu der oben angegebenen Überdeckung von $\mathbb{R}$ gibt es keine endliche Teilüberdeckung von $\mathbb{R}$. Läßt man auch nur eine der Mengen $(k-1, k+1)$ weg, so wird der Punkt k nicht mehr überdeckt.

2.) Hat X nur endlich viele Elemente, so ist X kompakt.

3.) Trägt X die Klumpentopologie, so ist X kompakt.

4.) Trägt X die diskrete Topologie, so ist X nicht kompakt, es sei denn X hat nur endlich viele Elemente.

Satz 2 (Heine-Borel). *$\mathbb{R}^n$ trage die Standardtopologie. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, genau dann wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Z. B. Forster, Analysis 2, Vieweg 1981, Seite 21.

Bemerkung. Wenn wir von kompakten Teilmengen eines topologischen Raumes sprechen, so ist dies stets bzgl. der Teilraumtopologie gemeint.

Eine Teilaussage im Satz von Heine-Borel ist in großer Allgemeinheit gültig:

Lemma 3. *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorff-Raum. Ist $A \subset X$ kompakt, so ist $A \subset X$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in X - A$. Für jedes $a \in A$ gibt es wegen der Hausdorff-Eigenschaft offene Mengen $U_{x,a}$, $V_{x,a} \in \mathcal{O}$ mit $x \in U_{x,a}$ $a \in V_{x,a}$ und $U_{x,a} \cap V_{x,a} = \emptyset$. Insbesondere bildet $\mathcal{U} = \{V_{x,a} \cap A \,|\, a \in A\}$ eine offene Überdeckung von A bezüglich der Teilraumtopologie. Wegen der Kompaktheit von A gibt es endlich viele $a_1, \ldots, a_N \in A$ mit $A \subset \bigcup_{j=1}^N V_{x,a_j}$. Setze $U_x := \bigcap_{j=1}^N U_{x,a_j}$. Dann ist U_x offen, $x \in U_x$ und $U_x \cap A = \emptyset$. Also ist $X - A = \bigcup_{x \in X-A} U_x$ offen, d. h. A ist abgeschlossen. □

Lemma 4. *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.*

Beweis. Sei X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\mathcal{U}$ eine bzgl. der Teilraumtopologie offene Überdeckung von A. Nach Definition der Teilraumtopologie gibt es eine Menge $\mathcal{U}'$ von bzgl. X offenen Teilmengen von X mit $\mathcal{U} = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{U}'\}$. Dann ist $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}' \cup \{X - A\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{U}''$ für X und damit auch von $\mathcal{U}'$ für A. Also ist A kompakt. □

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* der Topologie $\mathcal{O}$, falls jedes Element in $\mathcal{O}$ sich als Vereinigung von Elementen in $\mathcal{B}$ schreiben läßt, d. h. für alle $U \in \mathcal{O}$ gilt

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subset U}} V.$$

Beispiele.

1.) Ist X ein metrischer Raum, dann ist die Menge der offenen Bälle eine Basis der induzierten Topologie,

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) \,|\, x \in X, r > 0\}.$$

2.) Im Fall $X = \mathbb{R}^n$ kommt man auch mit Bällen aus, die rationalen Mittelpunkt und Radius haben, d. h.

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_r(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}.$$

Die Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$ besitzt also eine *abzählbare Basis*.

Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $x \in X$, $F : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f *stetig in x*, falls für jede Umgebung V von $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X ist. Falls f in jedem Punkt stetig ist, heißt f *stetig*.

Bemerkungen.

1.) f ist stetig genau dann, wenn

$$\forall V \in \mathcal{O}_Y : \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X.$$

2.) Ist $f : X \to Y$ stetig in $x \in X$ und $g : Y \to Z$ stetig in $f(x)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x.

3.) Sind X und Y metrische Räume, so ist f stetig in x genau dann, wenn folgendes ε-δ-Kriterium erfüllt ist:
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad f\left(B_\delta(x)\right) \subset B_\varepsilon(f(x)),$$
oder anders ausgedrückt,
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \tilde{x} \in X \text{ mit } d(x, \tilde{x}) < \delta : \quad d\Big(f(x), f(\tilde{x})\Big) < \varepsilon.$$

Beispiele.

1.) Trägt X die diskrete Topologie und Y irgendeine, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

2.) Trägt X irgendeine Topologie und Y die Klumpentopologie, so ist ebenfalls jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Lemma 5. *Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Dann ist $f(A)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $\mathcal{U}' = \left\{ f^{-1}(U) \,|\, U \in \mathcal{U} \right\}$ eine offene Überdeckung von A. Da A kompakt ist, besitzt $\mathcal{U}'$ eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es gibt $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{U}$ derart, daß $A \subset \bigcup_{j=1}^N f^{-1}(U_j)$. Dann ist
$$f(A) \subset f\Big(\bigcup_{j=1}^N f^{-1}(U_j)\Big) = \bigcup_{j=1}^N f(f^{-1}(U_j)) \subset \bigcup_{j=1}^N U_j.$$
Also ist $\{U_1, \ldots, U_N\} \subset \mathcal{U}$ eine endliche offene Teilüberdeckung von A. $\square$

Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Ein *Homöomorhphismus* ist eine stetige bijektive Abbildung $f : X \to Y$, so daß auch $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist. Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen die Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *homöomorph.*

Beispiele.

1.) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus.

2.) Sei X eine Menge mit mindestens 2 Elementen. Sei $\mathcal{O}_1$ eine diskrete Topologie auf X, $\mathcal{O}_2$ die Klumpentopologie. Dann ist
$$f = \mathrm{id} : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$$
stetig und bijektiv, aber f^{-1} ist **nicht** stetig. Also ist f kein Homöomorphismus.

Die Stetigkeit von f^{-1} ist, wie das letzt Beispiel zeigt, nicht automatisch erfüllt, wenn f stetig und bijektiv ist. Unter bestimmten Voraussetzungen gilt dies aber doch:

Lemma 6. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Hausdorff-Raum. Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist auch f^{-1} stetig, d. h. f ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß Bilder offener Mengen unter f wieder offen sind. Sei $U \in \mathcal{O}_X$. Dann ist $X - U$ abgeschlossen. Nach Lemma 4 ist $X - U$ kompakt. Nach Lemma 5 ist $f(X - U) = Y - f(U)$ kompakt. Nach Lemma 3 ist $Y - f(U)$ abgeschlossen. Also ist $f(U)$ offen. $\square$