Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär

Blatt 15 1. Februar 1999

Korrigierte Version

1

Sei (N, g^N) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir versehen $M := I \times N$ mit der semi-Riemannschen Metrik $g^M := -dt^2 + f(t)^2\, g^N$, wobei $f : I \to \mathbb{R}$ eine positive glatte Funktion ist, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Metrik von dieser Form heißt *verzerrte Produktmetrik*. Für festes $t \in I$ ist $\{t\} \times N$ eine semi-Riemannsche Hyperfläche vom Signum $\varepsilon = -1$. Zeigen Sie:

(a) Für die Weingarten-Abbildung S von $\{t\} \times N$ bezüglich des Normalenfeldes b_t gilt:

$$S = -\frac{\dot f}{f} \cdot \mathrm{Id}.$$

(Hinweis: Koszul-Formel.)

(b) Für festes $x \in N$ ist die Kurve $t \mapsto (t, x)$ eine Geodätische in (M, g^M).

(c) Seien $x^1, \ldots, x^n$ lokale Koordinaten für N. Setze $x^0 := t$. Wir bezeichnen die Christoffelsymbole für (M, g^M) mit Γ_{ij}^k, $0 \le i, j, k \le n$, diejenigen für (N, g^N) mit $\Gamma_{ij}^{N,k}$, $1 \le i, j, k \le n$. Dann gilt für $1 \le i, j, k \le n$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^{N,k} \\
\Gamma_{ij}^0 &= \dot f f g_{ij}^N \\
\Gamma_{i0}^i &= \Gamma_{0i}^i = \frac{\dot f}{f}. \qquad \text{(keine Summation über } i.)
\end{aligned}$$

Die restlichen Christoffelsymbole für (M, g^M) verschwinden.

(d) Eine Kurve $s \mapsto (t(s), \gamma(s))$ ist Geodätische in M genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
t''(s) &= -g^N\Big(\gamma'(s), \gamma'(s)\Big)\, f(t(s)) \dot f(t(s)), \\
\frac{\nabla^N}{ds}\gamma'(s) &= -2\,\frac{\dot f(t(s))}{f(t(s))} \cdot t'(s) \cdot \gamma'(s).
\end{aligned}$$

2 Die Voraussetzungen seien wie in Aufgabe 1. Den Riemannschen Krümmungstensor für (M, g^M) bezeichnen wir mit R^M, denjenigen für (N, g^N) mit R^N. Analog für die Ricci- und die Skalarkrümmung. Seien X, Y, Z Tangentialvektoren an N bzw. $\{t\} \times N \subset M$.
Zeigen Sie:

(a)

$$\begin{aligned}
R^M(X,Y)Z &= R^N(X,Y)Z - \dot{f}^2 \left\{ g^N(X,Z)\,Y - g^N(Y,Z)X \right\}, \\
R^M(X,b_t)Y &= -f\ddot{f}\, g^N(X,Y) \cdot b_t, \\
R^M(X,b_t)b_t &= -\frac{\ddot{f}}{f} X
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}^M(X,Y) &= \mathrm{ric}^N(X,Y) + \left(f\ddot{f} + (n-1)\dot{f}^2 \right) g^N(X,Y), \\
\mathrm{ric}^M(X,b_t) &= 0, \\
\mathrm{ric}^M(b_t,b_t) &= -n\frac{\ddot{f}}{f}, \\
\mathrm{scal}^M &= \frac{1}{f^2} \left(\mathrm{scal}^N + 2nf\ddot{f} + n(n-1)\dot{f}^2 \right).
\end{aligned}$$

(c) Verifizieren Sie die Formel aus der Vorlesung für den Energie-Impuls-Tensor für Robertson-Walker-Raumzeiten.

3 Wir betrachten nun ein Staubuniversum unter Annahme der Einsteinschen Feldgleichungen mit nichttrivialer kosmologischer Konstante Λ. Zeigen Sie:

(a) Gilt für die Massendichte $\rho = T(U,U) \geq 0$ und für die kosmologische Konstante $\Lambda \leq 0$, so ist $\ddot{f} \leq 0$, d. h. die Ausdehnungsrate des Universums nimmt nicht zu.

(b) Gilt $\Lambda > H_0(t_0)^2 + (\kappa/f(t_0)^2)$, wobei $H_0(t_0)$ die Hubble-Konstante ist, so nimmt die Ausdehungsrate zum Zeitpunkt t_0 zu, d. h. $\ddot{f}(t_0) > 0$.

4 Zeigen Sie: Jede Robertson-Walker-Raumzeit (mit $\Lambda = 0$), die gleichzeitig Vakuumlösung ist, ist flach. Welche Verzerrungsfunktionen f und welche κ kommen in Frage? Zeigen Sie ferner, daß die Robertson-Walker-Raumzeit mit $f(t) = t$, $I = (0,\infty)$ und $N = H^3$, $\kappa = -1$, isometrisch zu einer offenen Teilmenge des Minkowski-Raumes ist.

Abgabe: Montag, 8. Februar 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`