Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 14 — 25. Januar 1999

---

1 Zum *Zwillingsparadoxon*. Peter und Paul seien 26 Jahre alt, als Peter die Erde mit einem Raumschiff verläßt. Er entfernt sich zunächst mit konstanter halber Lichtgeschwindigkeit, macht abrupt kehrt und nähert sich der Erde wieder mit konstanter halber Lichtgeschwindigkeit. Bei ihrem Wiedersehen auf der Erde ist Paul 30 Jahre alt. Wie alt ist Peter?

2 Der *Schwarzschild-Streifen*. Sei $M > 0$ eine Konstante. Wir versehen

$$P_I^M := \{(t,r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < 2M\}$$

mit der Lorentz-Metrik

$$ds^2 = -h(r)\,dt^2 + \frac{1}{h(r)}\,dr^2,$$

wobei $h(r) = 1 - (2M/r)$ wie bei der Schwarzschild-Halbebene. Dann heißt (P_I^M, ds^2) *Schwarzschild-Streifen*.

(a) Geben Sie eine Zeitorientierung von (P_I^M, ds^2) an und skizzieren Sie die Lichtkegel zusammen mit der Zeitorientierung. Vergleichen Sie dies mit den Verhältnissen in der Schwarzschild-Halbebene.

(b) Berechnen Sie die Gauß-Krümmung von (P_I^M, ds^2).

3 Wir identifizieren die Poincaré-Halbebene $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$ aus Aufgabe 1, Blatt 11, mit

$$\mathcal{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}.$$

Sei $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ und } ad - bc = 1 \right\}$.

Zeigen Sie:

(a) Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

eine Isometrie von $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$.

(b) Setze $p := i \in \mathcal{H}$ und $X_0 := \frac{d}{dt}(i+t)\big|_{t=0} \in T_p\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $z \in \mathcal{H}$ und jedem $X \in T_z\mathcal{H}$, $\|X\| = 1$ genau zwei Elemente von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, die p auf z und X_0 auf X abbilden.

(c) Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$ ist isomorph zu

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := {}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\Big/\Big\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big\}$$

4 Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist die Länge einer Kurve $c : [a, b] \to M$ definiert durch

$$L[c] := \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}\, dt.$$

Für zwei Punkte aus dem hyperbolischen Raum, $p, q \in H^n$, sei $c_{pq} : [0, 1] \to H^n$ die eindeutige Geodätische mit $c_{pq}(0) = p$ und $c_{pq}(1) = q$. Wir definieren den *hyperbolischen Abstand* durch

$$d_{\mathrm{hyp}}(p, q) := L[c_{pq}].$$

Zeigen Sie:

(a) $\cosh(d_{\mathrm{hyp}}(p, q)) = - \ll p, q \gg$, wobei $\ll \cdot, \cdot \gg$ das Minkowski-Skalarprodukt des umgebenden $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, das die hyperbolische Metrik auf H^n induziert.

(b) Seien $p, q \in H^3$. Dann haben die beiden relativistischen Beobachter mit den Weltlinien $\mathbb{R} \cdot p$ und $\mathbb{R} \cdot q$ die betragsmäßige Relativgeschwindigkeit $\tanh(d_{\mathrm{hyp}}(p, q))$.

(c) *Relativistische Geschwindigkeitsaddition.* B_1, B_2 und B_3 seien gleichförmig bewegte Beobachter, die sich im Ereignis $(0, 0, 0, 0)$ treffen. Der Beobachter B_2 entferne sich von B_1 mit der betragsmäßigen Geschwindigkeit v_1. Analog entferne sich B_3 von B_2 in derselben Richtung mit Geschwindigkeit v_2. Dann entfernt sich B_3 von B_1 mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Hinweis: Benutzen sie das Additionstheorem für tanh.

Abgabe: Montag, 1. Februar 1999 in der Vorlesung

`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`