Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär

Blatt 13 — 18. Januar 1999

---

1 Sei (M, g) eine der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (S^n, g_{kan}), $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eukl}})$ oder (H^n, g_{hyp}). Sei $m \leq n$ und $p_0, \ldots, p_m \in M$ paarweise verschieden. Zeigen Sie: Es gibt eine zusammenhängende totalgeodätische Untermannigfaltigkeit $M' \subset M$ der Dimension m mit $p_0, \ldots, p_m \in M'$. Ist M' eindeutig?

2 Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ der *Drehhyperboloid.*

(a) Zeigen Sie, daß $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, und skizzieren Sie M.

(b) Sei g die Riemannsche Metrik auf M, induziert durch die euklidische Metrik g_{eukl} des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung von (M, g).

(c) Welcher Breitenkreis $\{z = \mathrm{const}\}$ ist eine Geodätische von (M, g)?

3 Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^3 + (x^4)^2 = 1\}$.

(a) Zeigen Sie, daß M eine semi-Riemannsche Hyperfläche von $(\mathbb{R}^5, g_{\mathrm{Mink}})$ vom Signum $\varepsilon = +1$ ist. Die Mannigfaltigkeit M mit der induzierten Lorentz-Metrik heißt *de Sitter-Raumzeit.*

(b) Berechnen Sie R, K, Ric und scal.

(c) Zeigen Sie: M ist diffeomorph zu $\mathbb{R} \times S^3$.

(d) Geben Sie eine Zeitorientierung an.

4 Konstruieren Sie eine Lorentz-Metrik auf S^n, $n \geq 3$, n ungerade, mit Zeitorientierung. Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 3 von Blatt 4.

Abgabe: Montag, 25. Januar 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`