Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 12 — 11. Januar 1999

---

1 Sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Seien $x^1, \dots, x^n$ Untermannigfaltigkeitskoordinaten, d.h. M ist lokal gegeben durch $x^{m+1} = \cdots = x^n = 0$. Seien $b_{x^1}, \dots, b_{x^n}$ die zugehörigen Basisvektorfelder, seien $b_{x^{m+1}}, \dots, b_{x^n}$ normal zu M. Seien $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole von $\bar{M}$ bezüglich der Koordinaten $x^1, \dots, x^n$. Zeigen Sie folgende Formel für die zweite Fundamentalform von M in $\bar{M}$:

$$\mathrm{I\!I}(b_{x^i}, b_{x^j}) = \sum_{k=m+1}^{n} \bar{\Gamma}_{ij}^k b_{x^k} \text{ , für } 1 \leq i, j \leq m.$$

2 Sei $\bar{M}$ eine flache semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $M \subset \bar{M}$ eine semi-Riemannsche Hyperfläche vom Signum $\varepsilon = \pm 1$. Sei S die Weingartenabbildung von M in $\bar{M}$. Zeigen Sie folgende Formel für die Ricci-Krümmung von M:

$$\mathrm{ric}(X, Y) = \varepsilon \cdot \big(\langle S(X), Y \rangle \mathrm{Spur}(S) - \langle S(X), S(Y) \rangle \big) \ .$$

Leiten Sie eine Formel für die Skalarkrümmung von M her.

3 Seien M_1, M_2 semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, sei $\bar{M} = M_1 \times M_2$ das Produkt mit Produktmetrik. Für $p \in M_1$ setze $M := \{p\} \times M_2$. Zeigen Sie, daß M totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von $\bar{M}$ ist.

4 Zeigen Sie: Es gibt keine kompakten semi-Riemannschen Hyperflächen des Minkowski-Raums $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{Mink}})$, $n \geq 2$. Hinweis: Zeigen Sie, daß jede Hyperebene (auch jede ausgeartete) irgendwo tangential an die Hyperfläche wäre.

Abgabe: Montag, 18. Januar 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`