Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär

Blatt 11 — 21. Dezember 1998

Die Vorlesung vom 23.12.1998 wird vorverlegt auf Mittwoch, den 23.12.1998, 9.15 Uhr!

1 Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ versehen mit der Riemannschen Metrik $g_{\mathcal{H}} := (1/y^2) g_{\text{eukl}}$ heißt *Poincaré-Halbebene.* Sei $p \in \mathcal{H}$. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole bezüglich der Standard-Karte und die Schnittkrümmung $K(E)$ für alle 2-dimensionalen Ebenen $E \subset T_p\mathcal{H}$.

2 *Pseudosphäre.* Zeigen Sie, daß die Menge

$$M := \left\{ \left(\begin{array}{c} e^{-u} \cos\varphi \\ e^{-u} \sin\varphi \\ \int_0^u \sqrt{1-e^{-2t}}\, dt \end{array} \right) \,\middle|\, u > 0, \pi \in [0, 2\pi] \right\}$$

eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^3, g_{\text{eukl}})$ ist. Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung der 1. Fundamentalform von M.

3 Seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Die Produktmannigfaltigkeit $M := M_1 \times M_2$ mit der Produktmetrik habe den Riemannschen Krümmungstensor R, Schnittkrümmung K, Ricci-Krümmung ric und Skalarkrümmung scal. Die entsprechenden Größen für M_1 und M_2 tragen den Index 1 bzw. 2. Zeigen Sie für $p_i \in M_i$ und $X_i, Y_i, Z_i \in T_{p_i} M_i$, $i = 1, 2$:

(a) $R(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)(Z_1 + Z_2) = R_1(X_1, Y_1)Z_1 + R_2(X_2, Y_2)Z_2$,

(b) $K(\text{span}\{X_1, Y_1\}) = K_1(\text{span}\{X_1, Y_1\})$, sofern $\text{span}\{X_1, Y_1\}$ eine nicht-ausgeartete Ebene ist,

(c) $K(\text{span}\{X_1, X_2\}) = 0$, sofern X_1 und X_2 nicht null sind,

(d) $\text{ric}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = \text{ric}_1(X_1, Y_1) + \text{ric}_2(X_2, Y_2)$,

(e) $\text{scal} = \text{scal}_1 + \text{scal}_2$.

4 Sei $\bar{M}$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E \subset T_p\bar{M}$ eine nicht-ausgeartete Ebene. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung $U \subset E$ von $0 \in E$, so daß $M := \exp_p(U)$ eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\bar{M}$ ist, und es gilt $K(p) = \bar{K}(E)$, wobei K die Gauß-Krümmung von M und $\bar{K}$ die Schnittkrümmung von $\bar{M}$ bezeichnet.

5 **Weihnachts-Extra-Aufgabe**. Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 3. Es gebe eine C^∞-Funktion $k\colon M \to \mathbb{R}$, so daß

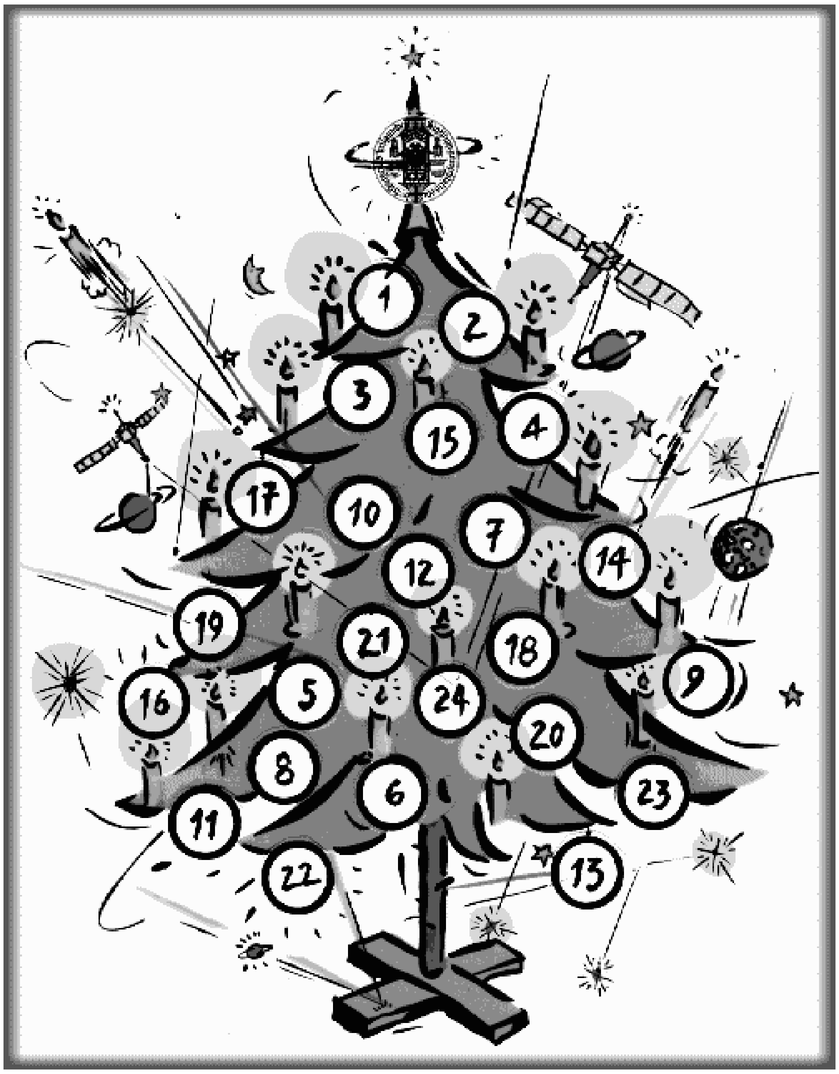
$$K(E) = k(p)$$

für alle $p \in M$ und alle nicht-ausgearteten Ebenen $E \subset T_pM$.

(a) Seien X, Y, Z, W Vektorfelder auf M, und sei $\nabla_X R$ wie in Aufgabe 4 vom letzten Blatt definiert. Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= k\left(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\right) \qquad \text{und} \\ (\nabla_W R)(X,Y)Z &= \partial_W k\left(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\right). \end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der 2. Bianchi-Identität aus Aufgabe 4(b) vom letzten Blatt den *Satz von Schur,* wonach k lokal konstant ist.



Abgabe: Montag, 11. Januar 1999 in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`