Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär

Blatt 10 — 14. Dezember 1998

---

1 Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische.

(a) Zeigen Sie: Ist $c(0) = c(L)$ und $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$, so ist c periodisch, $c(t) = c(t+L)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie ein Beispiel mit $c(0) = c(L)$ und $\dot{c}(0) \neq \dot{c}(L)$.

2 Sei $(M, g) = (\mathbb{R}P^n, g_{\mathrm{kan}})$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D}$ der Exponentialabbildung.

(b) Bestimmen Sie für $p \in \mathbb{R}P^n$ den maximalen Radius $r > 0$, s. d. für den offenen r-Ball $B_r(0) \subset T_pM$ mit Mittelpunkt 0 die Exponentialabbildung auf $B_r(0)$ injektiv ist.

3 Der Krümmungstensor wird in lokalen Koordinaten durch die n^4 Komponenten R_{kij}^l festgelegt. Zeigen Sie, daß die Symmetrien aus Proposition 10.3 die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ reduziert. Genauer: Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit nicht-ausgearteter Bilinearform $\langle \cdot , \cdot \rangle$, dann bildet die Menge aller multilinearen Abbildungen $R\colon V \times V \times V \to V$, die den Symmetrien aus Proposition 10.3 genügen, einen $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$-dimensionalen Vektorraum.

4 Für Vektorfelder X, Y, Z, W auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit M definieren wir

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z := \nabla_W\big(R(X,Y)Z\big) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z \,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $[(\nabla_W R)(X,Y)Z](p)$ nur von $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ und $W(p)$ abhängt.

(b) Beweisen Sie die zweite Bianchi-Identität:

$$(\nabla_Z R)(X,Y)W + (\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W = 0 \,.$$

Abgabe: Montag, 21. Dezember in der Vorlesung

`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`