Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär

Blatt 9 7. Dezember 1998

---

1 Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c\colon I \to M$ eine glatte Kurve, $\varphi\colon J \to I$ eine glatte Parametertransformation. Sei X ein glattes Vektorfeld längs c.

(a) Zeigen Sie: $Y = X \circ \varphi$ ist ein glattes Vektorfeld längs $c \circ \varphi$ und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} Y(t) &= \dot{\varphi}(t) \cdot \left(\frac{\nabla}{ds} X \right)(\varphi(t)) \\ \frac{\nabla^2}{dt^2} Y(t) &= \ddot{\varphi}(t) \cdot \left(\frac{\nabla}{ds} X \right)(\varphi(t)) + \dot{\varphi}(t)^2 \cdot \left(\frac{\nabla^2}{ds^2} X \right)(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Parameter in I mit s und den in J mit t bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, daß für die Parallelverschiebung gilt:

$$P^{c\circ\varphi}_{t_1,t_2} = P^c_{\varphi(t_1),\varphi(t_2)}$$

(c) Sei nun c eine nicht-konstante Geodätische. Zeigen Sie: $c \circ \varphi$ ist ebenfalls eine Geodätische genau dann, wenn φ von der Form $\varphi(t) = t_0 + \alpha \cdot t$ ist, $t_0, \alpha \in \mathbb{R}$.

2 Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre mit der Standardmetrik g_{kan}. Sei c der Breitenkreis auf S^2 gegeben durch die Höhe x^3 = konstant. Verschiebt man Tangentialvektoren parallel längs c (ein Umlauf), so werden sie um den Winkel ϑ gedreht. Berechnen Sie ϑ in Abhängigkeit von x^3 und der Umlaufsrichtung.

3 Sei $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \mathbb{C}^*$ und $g = g_{\mathrm{eukl}}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Wir erklären eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^*$ wie folgt:

$$z \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{Z}: \quad z = e^{\frac{2\pi i m}{k}} \cdot w.$$

(a) Zeigen Sie: $M/\sim$ mit der Quotiententopologie besitzt eine Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit, so daß die Restklassenprojektion $\pi : M \to M/\sim$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie: $M/\sim$ besitzt genau eine Riemannsche Metrik $\bar{g}$, so daß

$$\pi : (M, g_{\mathrm{eukl}}) \to (M/\sim, \bar{g})$$

eine lokale Isometrie ist.

(c) Berechnen Sie die Parallelverschiebung $P^c_{0,(2\pi/k)}$, wobei $c(t) = [e^{it}]$ ist.

(d) Illustrieren Sie (c) im Fall $k = 3$ durch ein Papiermodell.

4 Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Parallelverschiebung kann auch längs stetiger, stückweise glatter Kurven in M definiert werden. Ist nämlich $c:[a,b]\to M$ stetig, $a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$ eine Unterteilung und $c|_{[t_i,t_{i+1}]}$ glatt für alle $i=0,\ldots,N-1$, so setzt man einfach

$$P^c_{a,b} := P^c_{t_{N-1},t_N}\circ\cdots\circ P^c_{t_1,t_2}\circ P^c_{t_0,t_1}.$$

Zu jedem $p\in M$ definiert man die *Holonomiegruppe* $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ von M in p durch

$$\mathrm{Hol}_p(M,g) := \left\{ P^c_{a,b} \,|\, c:[a,b]\to M \text{ stetige, stückweise glatte Kurve mit } c(a)=c(b)=p \right\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ ist Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(T_pM,g_p)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Hol}_p(\mathbb{R}^n,g_{\mathrm{eukl}})$, $\mathrm{Hol}_p(\mathbb{R}^n,g_{\mathrm{Mink}})$ und $\mathrm{Hol}_p(S^2,g_{\mathrm{kan}})$ (vgl. Aufgabe 2).

Abgabe: Montag, 14. Dezember in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`