Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 8 30. November 1998

---

1 Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs für

(a) die Standardmetrik g_{kan} auf S^2 in Polarkoordinaten (vergleiche Übungsblatt 7, Aufgabe 1),

(b) die hyperbolische Metrik g_{hyp} auf H^n in der Karte von Übungsblatt 7, Aufgabe 2.

2 *Transformationsformel für Christoffelsymbole.* Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $x\colon U \to V$, $y\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ zwei Karten von M, seien g_{ij} bzw. $\tilde{g}_{ij}$ die Koordinatendarstellungen der semi-Riemannschen Metrik und Γ_{ij}^k bzw. $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich dieser Karten.
Zeigen Sie:

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k\, g_{kv} = \sum_{t,s} \frac{\partial y^t}{\partial x^v}\, \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^j\, \partial x^i}\, \tilde{g}_{st} + \sum_{r,s,t,w} \frac{\partial y^r}{\partial x^i}\, \frac{\partial y^s}{\partial x^j}\, \frac{\partial y^w}{\partial x^v}\, \widetilde{\Gamma}_{rs}^t\, \tilde{g}_{tw}$$

3 Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Eine Basis $E_1, \ldots, E_n$ von T_pM für $p \in M$ heißt *Orthonormalbasis,* falls $g_p(E_i, E_j) = 0$ für $i \neq j$ und $g_p(E_i, E_i) = \varepsilon_i = \pm 1$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau ein C^∞-Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ auf M, so daß für alle C^∞-Vektorfelder X gilt:

$$g(\operatorname{grad} f, X) = \partial_X f \; .$$

$\operatorname{grad} f$ heißt *Gradientenvektorfeld* von f.

(b) Für eine Orthonormalbasis $E_1, \ldots, E_n$ von T_pM gilt:

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \partial_{E_i} f \cdot E_i \; .$$

(c) In lokalen Koordinaten gilt:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot b_{x^j} \; ,$$

dabei ist $\big(g^{ij}(p)\big)_{i,j}$ die zu $\big(g_{ij}(p)\big)_{i,j}$ inverse Matrix.

4 Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇. Wir definieren den *Torsionstensor*

$$\tau\colon C^\infty(M,TM) \times C^\infty(M,TM) \to C^\infty(M,TM)$$

durch

$$\tau(X,Y) := [X,Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X \ .$$

Zeigen Sie, daß für $p \in M$ der Wert $\tau(X,Y)(p)$ nur von $X(p)$ und $Y(p)$ abhängt.

Abgabe: Montag, 7. Dezember in der Vorlesung

`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`