Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 7 23. November 1998

---

1 Drücken Sie die Standardmetrik g_{kan} von S^2 in Polarkoordinaten aus, d. h. in der Karte $\Phi : U \to V$, wobei

$$\begin{aligned} U &= S^2 - \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0,\, y = 0 \right\} , \\ \Phi^{-1}(\varphi,\theta) &= (\cos\varphi \cdot \sin\theta, \sin\varphi \cdot \sin\theta, \cos\theta) , \\ V &= (0,2\pi) \times (0,\pi) . \end{aligned}$$

2 Sei g_{hyp} die hyperbolische Metrik auf $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, d. h. die 1. Fundamentalform bzgl. der Minkowski-Metrik g_{Mink}. Sei g die 1. Fundamentalform, die H^n erhält, wenn $\mathbb{R}^{n+1}$ statt der Minkowski-Metrik die euklidische Metrik g_{eukl} trägt. Drücken Sie beide Riemannsche Metriken g_{hyp} und g in der Karte $\varphi : H^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,x_n)$ aus.

3 Seien $S^n_\nu = S^n_\nu(1)$ und $H^n_\nu = H^n_\nu(1)$ die *Pseudospäre* bzw. der *pseudohyperbolische Raum* vom Radius 1 wie definiert in O'Neill, Seite 110.

(a) Zeigen Sie S^n_ν und H^n_ν sind semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n+1}$ (mit der entsprechenden semi-Riemannschen Metrik).

(b) Was ist der Index der 1. Fundamentalform von S^n_ν und H^n_ν?

(c) Zeigen Sie: S^n_ν ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^\nu \times S^{n-\nu}$ und H^n_ν ist diffeomorph zu $S^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$.

4 Zeigen Sie:

$$\text{Isom}(\mathbb{R}P^n, g_{\text{kan}}) \cong \text{O}(n+1)/\{\mathbb{1}_{n+1}, -\mathbb{1}_{n+1}\}$$

Abgabe: Montag, 30. November in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`