Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 6 16. November 1998

---

1 Seien M, N, P differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m, n bzw. p. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$ C^∞-Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr (Beweis bzw. Gegenbeispiel)?

(a) Ist $x \in M$ regulärer Punkt von f, so ist $f(x)$ regulärer Wert von f.

(b) Ist $f^{-1}(y)$ eine $(m-n)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, so ist y ein regulärer Wert von f.

(c) Ist x ein regulärer Punkt von f und ist $f(x)$ ein regulärer Punkt von g, so ist x ein regulärer Punkt von $g \circ f$.

2 Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 1$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Zeigen Sie

(a) Ist M kompakt und hat f nur einen kritischen Wert, so ist f konstant. *Hinweis:* Betrachten Sie Minimum und Maximum von f.

(b) Es gibt nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten M, so daß f auch genau einen oder auch gar keinen kritischen Wert haben kann, ohne konstant zu sein.

3 Begründen Sie für folgende Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$, warum sie Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind. Bestimmen Sie ferner für alle $p \in M$ die Tangentialräume T_pM, genauer die Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$, die dem T_pM nach kanonischer Einbettung entsprechen:

(a) $M = S^k \times \mathbb{R}^l$, $k + l + 1 = n$

(b) $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 + x_1^2 = x_2^2 + \cdots + x_n^2\}$

(c) $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + 2xy + 2y^2 = 1,\ z + w = 0\}$

4 *Parametrisierung nach der Bogenlänge.* Sei M eine 1-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß M einen C^∞-Atlas $\mathcal{A}$ besitzt, so daß für jede Karte $\varphi : U \to V$ aus $\mathcal{A}$ die lokale Darstellung der Riemannschen Metrik

$$g_{11} : V \to \mathbb{R}$$

gerade $g_{11} \equiv 1$ erfüllt.

Abgabe: Montag, 23. November in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`