Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 5 9. November 1998

---

1 Bestimmen Sie zum Vektorfeld X auf M die Integralkurven, entscheiden Sie, ob X vollständig ist, und geben Sie gegebenenfalls den Fluß an.

(a) $M = \mathbb{R}^2$, $X(x,y) = x \cdot b_x(x,y) + y \cdot b_y(x,y)$, wobei (x,y) die kartesischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$ sind.

(b) $M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $X(x,y) = \dfrac{1}{\|(x,y)\|^2}\Big(x \cdot b_x(x,y) + y \cdot b_y(x,y)\Big)$

2 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind Untermannigfaltigkeiten? (Begründung?)

(a) $\mathbb{Z}^3$

(b) $\mathbb{Q}^3$

(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$

(d) Doppelkegel: $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$

3 Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sei $\Phi : M \to N$ eine glatte Abbildung. Zwei Vektorfelder X auf M und Y auf N heißen Φ-*verwandt*, falls für alle $p \in M$ gilt:

$$d_p\Phi\big(X(p)\big) = Y\big(\Phi(p)\big).$$

Seien nun X_i und Y_i Φ-verwandt, $i = 1, 2$. Zeigen Sie: $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ sind ebenfalls Φ-verwandt.

4 Sei X ein vollständiges glattes Vektorfeld auf M mit Fluß φ_t, sei Y ein weiteres glattes Vektorfeld auf M. Die *Lie-Ableitung* von Y nach X ist definiert durch

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)(p) &= \lim_{t\to 0} \frac{d_{\varphi_t(p)}\varphi_{-t}\left(Y\left(\varphi_t(p)\right)\right) - Y(p)}{t} \\ &= \frac{d}{dt}\, d_{\varphi_t(p)}\varphi_{-t}\Big(Y\left(\varphi_t(p)\right)\Big)\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

Beachten Sie dabei, daß für alle t der Tangentialvektor $d_{\varphi_t(p)}\varphi_{-t}\left(Y\left(\varphi_t(p)\right)\right)$ im selben Tangentialraum T_pM liegt, so daß die Definition sinnvoll ist. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Abgabe: Montag, 16. November in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`