Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“
WS 1998/99 bei Prof. C. Bär
Blatt 4 — 2. November 1998

Neue Übungsgruppe: Freitag 14–16 Uhr, SR 218, Eckerstr. 1

1 Sei X das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, das in der Karte $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, d.h. in kartesischen Koordinaten, der konstanten Abbildung

$$\xi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;, \qquad \xi(x) = (1,1,1) \;,$$

entspricht. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von X für

(a) Polarkoordinaten, d. h. die Karte $\Phi_1 : U_1 \to V_1$, wobei

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^3 - \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0 \text{ und } y = 0 \right\} , \\ V_1 &= \left\{ (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } 0 < \theta < \pi \right\} , \\ \Phi_1^{-1}(r,\varphi,\theta) &= (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \;; \end{aligned}$$

(b) Zylinderkoordinaten, d. h. die Karte $\Phi_2 : U_2 \to V_2$, wobei

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1 \;, \\ V_2 &= \left\{ (r,\varphi,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < 2\pi \right\} , \\ \Phi_2^{-1}(r,\varphi,\zeta) &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \zeta) \;. \end{aligned}$$

2 Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}P^n$ und $\mathbb{C}P^n$ kompakt sind.
Hinweis: Benutzen Sie, daß Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen kompakt sind.

3 Sei $M = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Zu $p \in S^{2n+1}$ setze

$$c_p(t) = e^{it} \cdot p \;.$$

Zeigen Sie, daß $X(p) := [c_p]$ ein nirgends verschwindendes C^∞-Vektorfeld auf M ist.

4 Sei $H : \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ die Abbildung

$$H(z_0, z_1) = \frac{1}{4|z_1|^2 + |z_0|^2} \left(4|z_1|^2 \cdot \frac{z_0}{z_1} \, , \, 4|z_1|^2 - |z_0|^2 \right).$$

Zeigen Sie

(a) Für $S^3 \subset \mathbb{R}^4 - \{(0,0,0,0)\} = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ und $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ gilt $H(S^3) = S^2$ und

$$H|_{S^3} : S^3 \to S^2$$

ist eine glatte Abbildung. Man nennt $H|_{S^3}$ die *Hopf-Abbildung*.

(b) Für $\pi : \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{C}P^1$, $\pi(z_0, z_1) = [(z_0, z_1)]$, gibt es genau einen Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{C}P^1 \to S^2$, so daß

$$H|_{S^3} = \varphi \circ \pi|_{S^3}.$$

(c) Für das Vektorfeld X aus Aufgabe 3 ($n = 1$) berechnen Sie $d_pH(X(p))$.

Abgabe: Montag, 9. November in der Vorlesung

`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`