# Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 1998/99

Blatt 3 — 26. Oktober 1998

---

**1** Wir setzen $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, n$. Zeigen Sie:

(a) Die $U_i$ sind offen in $\mathbb{R}P^n$.

(b) Die Abbildungen $\chi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $\chi_i\big([x_0, \dots, x_n]\big) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$, sind wohldefinierte Diffeomorphismen.

(c) $\mathcal{A} = \{U_i \xrightarrow{\chi_i} \mathbb{R}^n \mid i = 0, \dots, n\}$ ist ein $\mathcal{C}^\infty$-Atlas von $\mathbb{R}P^n$, der die Standardstruktur induziert.

**2** (a) Zeigen Sie, daß der $n$-dimensionale Torus $T^n$ diffeomorph ist zu $\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{-mal}}$.

Hinweis: Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ die Projektion und $\varphi : \mathbb{R}^n \to S^1 \times \cdots \times S^1$, $\varphi(x) = \Big(\big(\cos(2\pi x_1), \sin(2\pi x_1)\big), \dots, \big(\cos(2\pi x_n), \sin(2\pi x_n)\big)\Big)$. Dann gibt es einen wohldefinierten Diffeomorphismus $\psi : T^n \to S^1 \times \cdots \times S^1$ mit $\varphi = \psi \circ \pi$.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}P^1$ und $S^1$ diffeomorph sind. Bemerkung: Für $n \geq 2$ sind $S^n$ und $\mathbb{R}P^n$ allerdings nicht diffeomorph.

**3** Berechnen Sie für $f : M \to \mathbb{R}$ die Richtungsableitung $\partial_{[c]} f$, wobei

(a) $M = S^n$, $p, X \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X \perp p$, $c(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot X$ und $f : S^n \to \mathbb{R}$, $f(x_0, \dots, x_n) = x_0$.

(b) $M = \mathbb{R}P^n$, $c(t) = [\cos t \cdot p + \sin t \cdot X]$, $p$, $X$ wie in (a), und $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$, $f\big([x_0, \dots, x_n]\big) = x_0^2$.

(c) $M = T^n$, $c(t) = [t, \dots, t]$ und $f : T^n \to \mathbb{R}$, $f\big([x_1, \dots, x_n]\big) = \sin(2\pi x_i) \cdot \ldots \cdot \sin(2\pi x_n)$.

**4** Berechnen Sie die Ränge der Differentiale $d_p\varphi$ und $d_p\psi$ für alle $p$, wobei $\varphi$ und $\psi$ die Veronese- bzw. Segre-Abbildung aus Aufgabe 1, Übungsblatt 2, sind.

Abgabe: Montag, 2. November in der Vorlesung

`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`