Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie" im WS 1998/99

Blatt 2 19. Oktober 1998

---

1 Zeigen Sie, daß folgende Abbildungen wohldefiniert und glatt sind:

(a) *Veronese-Abbildung*: $\varphi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^6$, $\varphi\big([x_0, x_1, x_2]\big) = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$.

(b) *Segre-Abbildung*: $\psi : \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^8$,

$$\psi\big([x_0, x_1, x_2], [y_0, y_1, y_2]\big) = [x_0y_0, x_0y_1, \ldots, x_iy_j, \ldots, x_2y_2].$$

2 Zeigen Sie, daß folgende Mengen $\mathcal{G}$ Pseudogruppen auf dem $\mathbb{R}^n$ bilden:

(a) $\mathcal{G} = \mathbf{Vol} = \{g \in \mathcal{C}^\infty \mid |\det(Dg)| \equiv 1\}$. Hier bezeichnet Dg die Jacobi-Matrix von g. **Vol**-Mannigfaltigkeiten heißen *differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Maß.*

(b) $\mathcal{G} = \mathbf{Orient} = \{g \in \mathcal{C}^\infty \mid \det(Dg) > 0\}$. **Orient**-Mannigfaltigkeiten heißen *orientierte Mannigfaltigkeiten.*

(c) Wir zerlegen $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $n = m+k$, und schreiben $(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{m+k}$.

$\mathcal{G} = \mathbf{Lin}_k = \big\{g \in \mathcal{C}^\infty \;\big|\; g(x, y) = \big(g_1(x), A(x) \cdot y\big), A(x) \in GL(k), \quad g_1$ lokaler Diffeomorphismus $\big\}$.
In Worten: Wir betrachten die Diffeomorphismen, die linear in y sind. Spezielle $\mathbf{Lin}_k$-Mannigfaltigkeiten werden uns als *Vektorbündel* später noch begegnen.

3 Sei X eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Sei $\mathcal{G}$ die triviale Pseudogruppe auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für die folgenden Aussagen die Implikationen (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii):

(i) X ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(ii) X besitzt einen Atlas mit genau einer Karte.

(iii) X besitzt eine $\mathcal{G}$-Struktur.

4 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *zusammenhängend*, falls er **nicht** in zwei disjunkte offene nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann, d. h. aus $X = U_1 \cup U_2$, $U_i \in \mathcal{O}$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, folgt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. Er heißt *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte $p, q \in X$ durch einen stetigen Weg verbinden lassen, d. h. es gibt eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \to X$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.
Zeigen Sie, daß eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist. Welche Implikation gilt für alle topologischen Räume?

Abgabe: Montag, 26. Oktober in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`