Übungen zur Vorlesung „Differentialgeometrie“ im WS 1998/99
Blatt 1 — 12. Oktober 1998

Bitte tragen Sie sich am 12. Oktober in der Vorlesung in die Liste der Übungsgruppen ein. Die Einteilung wird am Mittwoch, den 14. Oktober bekanntgegeben. Am 15. Oktober finden bereits zum erstenmal Übungen statt. In dieser Übung sollen Fragen zur Topologie geklärt werden.

1 Bilden Sie für $A \subset \mathbb{R}$ das Innere und den Abschluß, und zwar bzgl. der Standardtopologie, der diskreten Topologie und der Klumpentopologie auf $\mathbb{R}$, wobei

(a) $A = [0, 1]$,

(b) $A = (0, 1)$,

(c) $A = \mathbb{Z}$,

(d) $A = \mathbb{Q}$.

2 Es tragen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Standardtopologien.
Zeigen Sie, daß die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ mit der Standardtopologie übereinstimmt.

3 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf X, $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$.

(a) Zeigen Sie, daß die Quotiententopologie $\mathcal{O}'$ auf $X/\sim$ tatsächlich eine Topologie ist.

(b) Zeigen Sie: $\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.

(c) Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X/\sim \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
$$f : X/\sim \to Y \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \pi : X \to Y \text{ ist stetig.}$$

(d) Sei $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Wir definieren
$$s \sim t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = t \text{ oder} \\ s = 0 \text{ und } t = 1, \text{ oder} \\ s = 1 \text{ und } t = 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie: $[0, 1]/\sim$ mit der Quotiententopologie ist homöomorph zu $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Standardtopologie.

4 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, sei p ein weiterer Punkt, $p \notin X$. Setze $X^+ := X \cup \{p\}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}_{X^+} := \mathcal{O}_X \cup \left\{ (X \setminus K) \cup \{p\} \;\middle|\; K \subset X \text{ kompakt} \right\} .$$

Zeigen Sie:

1. $(X^+, \mathcal{O}_{X^+})$ ist ein topologischer Raum.
2. X^+ ist kompakt.
3. X^+ ist Hausdorffsch genau dann, wenn X *lokalkompakt* ist, d. h. jeder Punkt in x besitzt eine kompakte Umgebung.
4. $(-1, 1)^+$ ist homöomorph zu S^1.

Man nennt X^+ die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.

Übungsgruppen:
Gruppe 1: Donnerstag 11–13, SR 227, Hermann-Herder-Str. 10
Gruppe 2: Donnerstag 14–16, SR 403, Eckerstr. 1

Abgabe: Montag, 19. Oktober in der Vorlesung
`http://web.mathematik.uni-freiburg.de/home/ammann/diffgeo`