

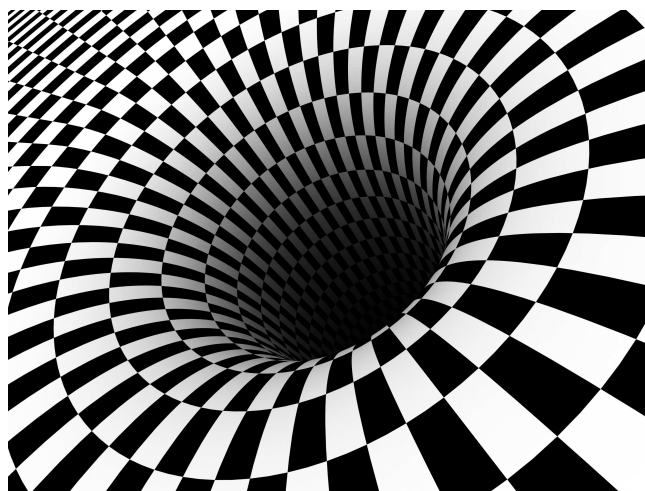
Bernd Ammann  
Christian Bär

# Das Yamabe-Problem

SS 2018 und WS 2018/19 in Regensburg  
Wintersemester 2022/23 in Regensburg

## Geometrische Analysis

Wintersemester 2007/08 in Potsdam



Picture on title page taken from [www.sxc.hu](http://www.sxc.hu)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
Vorwort zur Potsdamer Version . . . . .	v
Vorwort zur Regensburger Version . . . . .	v
Vorwort zur neuen Regensburger Version . . . . .	vi
<b>Motivation</b>	<b>1</b>
<b>1. Analytische Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1. Sobolev-Räume . . . . .	5
1.2. Kompaktheit . . . . .	24
1.3. Der Gauß'sche Divergenzsatz . . . . .	38
1.4. Poincaré-Ungleichung . . . . .	43
1.5. Hölder-Räume . . . . .	45
1.6. Das Maximum-Prinzip . . . . .	54
1.7. Differentialoperatoren und schwache Lösungen . . . . .	58
1.8. Elliptische Regularität . . . . .	63
1.9. Regularität subkritischer nicht-linearer partieller Differentialgleichungen . . . . .	67
1.10. Von schwachen zu starken Lösungen bei kritischen Nicht-Linearitäten . . . . .	71
1.11. Green-Funktionen . . . . .	75
1.12. Hebbarkeitssatz . . . . .	84
<b>2. Konforme Geometrie</b>	<b>91</b>
2.1. Konforme Änderungen der Metrik . . . . .	91
2.2. Die konforme Gruppe und der erste Satz von Obata . . . . .	107
2.3. Stereografische Projektion und die Standard-Blasen auf $\mathbb{R}^n$ . . . . .	111
2.4. Weitere klassische Sätze der konformen Geometrie . . . . .	115
<b>3. Das Yamabe-Problem</b>	<b>117</b>
3.1. Das ungestörte und gestörte Yamabe-Funktional . . . . .	117
3.2. Unsichtbarkeit von Untermannigfaltigkeiten mit Kodimension $\geq 2$ . . . . .	121
3.3. Die Aubin-Ungleichung . . . . .	125
3.4. Lösung der subkritischen Gleichung . . . . .	131
3.5. Monotonie der gestörten Yamabe-Konstanten . . . . .	133
3.6. Aufblasung . . . . .	135
3.7. $L^{p_c}$ -Lösungen der Yamabe-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$ . . . . .	139
3.8. Lösung des Yamabe-Problems . . . . .	140

<b>4. Die Aubin–Schoen-Ungleichung im Fall <math>W \not\equiv 0</math> und <math>n \geq 6</math></b>	<b>143</b>
4.1. Beweis mit konformen Normalkoordinaten . . . . .	143
4.2. Existenz von konformen Normalkoordinaten . . . . .	151
<b>5. Der Satz von der positiven Masse und die verbleibenden Fälle</b>	<b>165</b>
5.1. Green-Funktionen von $Y$ und die Umstülpung . . . . .	165
5.1.1. Green-Funktionen von $Y$ . . . . .	165
5.1.2. Die Umstülpung des euklidischen Raumes . . . . .	170
5.1.3. Umstülpung kompakter Mannigfaltigkeiten . . . . .	171
5.2. Die Test-Funktionen . . . . .	176
5.3. Die ADM-Masse . . . . .	186
5.3.1. Definition der ADM-Masse und Vermutung der positiven Masse . .	186
5.3.2. Positivität der ADM-Masse . . . . .	190
5.3.3. Die ADM-Masse und der konstante Term der Green-Funktion . .	191
5.4. Der Satz von der positiven Masse für Spin-Mannigfaltigkeiten . . . . .	193
5.4.1. Einführung in die Spin-Geometrie . . . . .	193
5.4.2. Analysis von Dirac-Operatoren und Green-Funktion von $\not{D}$ . . .	194
5.4.3. Identifikation von Spinoren bezüglich verschiedener Metriken . .	195
5.4.4. Effiziente Trivialisierung des Spinorbündels in Normalkoordinaten	197
5.4.5. Asymptotik der Green-Funktion von $\not{D}$ . . . . .	201
5.4.6. PMT für kompakte Spin-Mannigfaltigkeiten . . . . .	203
5.4.7. Der Dirac-Operator in Polarkoordinaten . . . . .	207
5.4.8. Ein Regularitäts-Lemma . . . . .	209
5.4.9. Beweis von Proposition 5.33 . . . . .	211
5.4.10. Mannigfaltigkeiten mit endlicher Spin-Überlagerung . . . . .	212
<b>6. Ergänzungen, Erweiterungen, alternative Beweise</b>	<b>213</b>
6.1. Die Sobolev-Konstante . . . . .	213
6.2. Eindeutigkeit der Lösung des Yamabe-Problems? . . . . .	214
6.3. Der erste Eigenraum des Operators $\Delta + h$ . . . . .	220
6.4. Die Green'sche Funktion von $\not{D}$ auf $\mathbb{R}^n$ . . . . .	220
6.5. Homogene Polynome . . . . .	221
6.6. Alternative Beweise . . . . .	222
6.6.1. Alternativer Beweis von Satz 5.13 . . . . .	222
<b>A. Riemannsche Geometrie</b>	<b>223</b>
A.1. Mannigfaltigkeiten . . . . .	223
A.1.1. Atlanten und glatte Strukturen . . . . .	223
A.1.2. Vektorfelder . . . . .	225
A.1.3. Tensoren . . . . .	226
A.1.4. Levi–Civita-Zusammenhang und die Koszul-Formel . . . . .	229
A.2. Die Geometrie von Untermannigfaltigkeiten . . . . .	229
A.2.1. Kovariante Ableitung und zweite Fundamentalform . . . . .	229
A.2.2. Hyperflächen und Flächen . . . . .	232

A.2.3. Isometrische und konforme Abbildungen, Isometrien . . . . .	236
A.3. Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	239
A.4. Krümmung riemannscher Mannigfaltigkeiten . . . . .	241
<b>B. Zusammenfassung von wichtigen Sätzen der Funktionalanalysis</b>	<b>245</b>
<b>C. Konventionen</b>	<b>247</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>249</b>
<b>Index</b>	<b>255</b>



# **Vorworte**

## **Vorwort zur Potsdamer Version**

Dies ist das Skript zu der Vorlesung über geometrische Analysis, die ich im Wintersemester 2007/08 an der Universität Potsdam gehalten habe. Ziel der Vorlesung war es, Methoden der nicht-linearen Analysis zu entwickeln, die bei der Behandlung geometrischer Probleme von Nutzen sind. Ursprünglich war geplant, zunächst das Yamabe-Problem zu besprechen und anschließend harmonische Abbildungen zu untersuchen. Dies hat sich bald als im gegebenen Zeitrahmen zu ambitioniert erwiesen. Daher habe ich mich auf zwei Teile beschränkt; einen ersten, in dem analytische Grundlagen wie z.B. Sobolev-Räume auf Mannigfaltigkeiten entwickelt werden, und einen zweiten, in dem das Yamabe-Problem ausführlich untersucht wird.

Neben den üblichen Grundvorlesungen über lineare Algebra und Analysis wurde lediglich ein wenig Funktionalanalysis vorausgesetzt, nämlich das Konzept von Banach- und Hilberträumen. Daher war die Vorlesung für Studierende der Mathematik ab dem 5. Semester geeignet.

Mein herzlicher Dank geht an Christian Becker, der die Erstversion dieses Skriptes in hervorragender Qualität verfasst hat.

Potsdam, Mai 2011,

Christian Bär

## **Vorwort zur Regensburger Version**

Dies ist das Skript zur Vorlesung „Das Yamabe-Problem“, die ich im Sommersemester 2018 und dem Wintersemester 2018/19 an der Universität Regensburg gehalten habe. Die Vorlesung verlief in großen Teilen sehr nahe an dem Skript von Christian Bär. Sehr dankbar bin ich auch gegenüber Emmanuel Humbert, Tours, von dem ich viele wichtige Techniken rund um das Yamabe-Problem gelernt habe, die wiederum an mehreren Stellen in das vorliegende Skript eingegangen sind.

Regensburg, Februar 2019,

Bernd Ammann

## **Vorwort zur neuen Regensburger Version**

Die Vorlesung wurde nochmals unter leicht verändertem Titel im Wintersemester 2022/23 gelesen.

Die aktuelle Version ist unter dem Link

[http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2022w\\_yamabe/yamabescript.pdf](http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2022w_yamabe/yamabescript.pdf)

verfügbar.

Die Homepage der Vorlesung ist

[http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2022w\\_yamabe](http://www.mathematik.ur.de/ammann/lehre/2022w_yamabe).

Regensburg, Oktober 2022,

Bernd Ammann



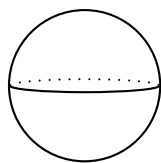
# Motivation: Konstante Krümmung

Eine zentrale Frage unserer Vorlesung ist die Suche nach besonders schönen riemannschen Metriken auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit  $M$ . Um die Frage etwas zu präzisieren: wir suchen Metriken mit „konstanter Krümmung“ auf geschlossenen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M$ , das heißt auf kompakten Mannigfaltigkeiten (ohne Rand).

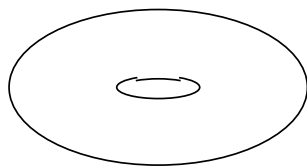
Hierbei ist insbesondere zu klären, welchen Krümmungsbegriff wir betrachten, zum Beispiel, ob wir konstante Schnittkrümmung, konstante Riccikrümmung oder konstante Skalarkrümmung studieren wollen.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall von Dimension  $n = 2$ . In diesem Fall hat das Problem eine Lösung: Jede geschlossene Fläche besitzt eine riemannsche Metrik konstanter Gaußkrümmung.

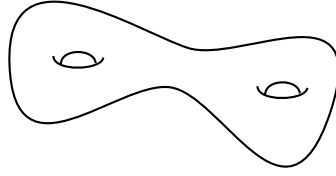
- (a) Auf  $M = S^2$  gibt es eine riemannsche Metrik mit  $K \equiv 1$ .



- (b) Auf  $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  gibt es eine riemannsche Metrik mit  $K \equiv 0$ .



- (c) Auf einer kompakten zusammenhängenden orientierten Fläche von Geschlecht  $\gamma \geq 2$  gibt es eine riemannsche Metrik mit  $K \equiv -1$ .



Für geschlossene Mannigfaltigkeiten  $M$  der Dimension  $n \geq 3$  gibt es verschiedene Verallgemeinerungen der Frage nach Metriken konstanter Krümmung. Je nachdem, welchen Krümmungsbegriff man zugrunde legt, haben sie mehr oder weniger interessante Antworten:

- (a) Konstante Schnittkrümmung: Trägt  $M$  eine Metrik  $g$  mit Schnittkrümmung  $K = K^{(M,g)} = \text{const} \in \{-1, 0, 1\}$ , und ist  $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$  die universelle Überlagerung. Dann ist die Schnittkrümmung der riemannschen Metrik  $\tilde{g} := \pi^*g$  auf  $\tilde{M}$  ebenfalls konstant mit demselben Wert,  $K^{(\tilde{M},\tilde{g})} = K^{(M,g)}$ . Dann ist  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  isometrisch
- zum hyperbolischen Raum  $\mathcal{H}^n$ , falls  $K = -1$ ,
  - zu  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik, falls  $K = 0$ ,
  - zur Sphäre  $S^n$  mit der von  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik, falls  $K = 1$ ,

siehe [24, Chapt. 8]. Insbesondere gibt es Mannigfaltigkeiten, die gar keine Metriken konstanter Schnittkrümmung besitzen können. Zum Beispiel ist eine Metrik mit  $K \leq 0$  auf  $M = S^{n-1} \times S^1$  nicht möglich, da in diesem Fall der Satz von Hadamard [24, Chap. 7, §3] implizierte, dass  $M$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist; andererseits ist es offensichtlich, dass die universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  von  $M$  diffeomorph zu  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$  ist. Schnittkrümmung  $K \equiv 1$  ist nach dem Satz von Bonnet-Myers [24, Chap. 9, §3] ausgeschlossen, da  $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$  nicht endlich ist.

- (b) Konstante Riccikrümmung: Metriken konstanter Riccikrümmung, so genannte *Einstein-Metriken*, existieren nicht auf allen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen 3 und 4.

In Dimension  $n = 3$  impliziert konstante Riccikrümmung bereits konstante Schnittkrümmung. Deswegen gibt es auch keine Einstein-Metriken auf  $S^2 \times S^1$ . In Dimension 4 kann man zeigen, dass die Euler-Charakteristik einer Mannigfaltigkeit mit Einstein-Metrik nicht-negativ ist. Dies liefert viele geschlossene Mannigfaltigkeiten ohne Einstein-Metriken. Weitere Hilfsmittel für Nichtexistenz-Beweise von Einstein-Metriken auf 4-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind die Hitchin–Thorpe-Ungleichung, Seiberg–Witten-Theorie und das simpliziale Volumen. Ein guter Übersichtsartikel zu diesen Themen ist [49].

Für  $\dim(M) = n \geq 5$  ist die Frage erstaunlich ungeklärt: es gibt keine geschlossene Mannigfaltigkeit dieser Dimensionen, für die man die Nichtexistenz von Einstein-Metriken zeigen könnte. Aber es gibt auch nur sehr wenige Konstruktionsverfahren

von Einsteinmetriken. Deswegen weiß man für die meisten Mannigfaltigkeiten nicht, ob es darauf Einstein-Metriken gibt.

Im Jahre 1960 hatte der Mathematiker Yamabe einen interessanten Ansatz, um Einstein-Metriken aufzufinden [61]. Für eine riemannsche Metrik  $g$  betrachten wir das *Einstein–Hilbert-Funktional*

$$\mathcal{E}(g) := \frac{\int_M \text{scal}^g \, d\text{vol}^g}{\text{vol}(M, g)^{(n-2)/n}}.$$

Wir erhalten eine Abbildung vom Raum aller Metriken in die reellen Zahlen, die in einem geeigneten Sinn glatt ist. Die stationären Punkte des Einstein–Hilbert-Funktional sind genau die Einstein-Metriken. Da dieses Funktional sowohl nach unten als auch nach oben unbeschränkt ist, benötigt man zusätzlich Tricks, um stationäre Punkte zu finden. Hier gibt es teilweise Erfolge, aber noch viele offene Probleme. Diese Fragen werden teilweise später im Buch noch diskutiert werden.

- (c) Konstante Skalarkrümmung: Zur Suche einer Metrik konstanter Skalarkrümmung betrachten wir folgenden Ansatz: für eine gegebene Metrik  $g$  auf  $M$ ,  $n := \dim M$  setze  $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$  mit  $\varphi \in C^\infty(M)$ ,  $\varphi > 0$ . Für die Skalarkrümmung  $\widetilde{\text{scal}}$  der neuen Metrik  $\tilde{g}$  ergibt sich:

$$\widetilde{\text{scal}} = \varphi^{\frac{2+n}{2-n}} \underbrace{\left( 4 \frac{n-1}{n-2} \Delta^g \varphi + \text{scal} \varphi \right)}_{Y^g(\varphi)}.$$

Das geometrische Problem, eine Metrik konstanter Skalarkrümmung  $\widetilde{\text{scal}} \equiv C$  zu finden, übersetzt sich so in das analytische Problem, die nichtlineare Eigenwertgleichung

$$Y(\varphi) = C \cdot \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

für den Operator  $Y$  zu lösen. Dieses Problem nennt sich das *Yamabe-Problem*, da es auch auf Yamabes Arbeit [61] zurückgeht. Zu zeigen, dass es auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit eine Metrik mit konstanter Skalarkrümmung gibt, ist eines der Hauptziele dieser Vorlesung.

Mit Hilfe des Einstein–Hilbert-Funktional kann man das Problem auch umformulieren.

Zu einer riemannschen Metrik  $g$  betrachten wir die Menge aller zu  $g$  konformen riemannschen Metriken, die sogenannte *konforme Klasse* von  $g$

$$[g] := \left\{ \varphi^{\frac{4}{n-2}} g \mid \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ glatt} \right\}.$$

In jeder konformen Klasse  $[g]$  ist  $\mathcal{E}|_{[g]}$  nach unten beschränkt. Die stationären Punkte von  $\mathcal{E}|_{[g]}$  sind genau die Metriken mit konstanter Skalarkrümmung. Wir werden sehen, dass das Infimum  $\lambda(M, [g])$  in einer Metrik  $g_0$  angenommen wird, deswegen

ist  $g_0$  ein stationärer Punkt von  $\mathcal{E}|_{[g]}$ , hat also konstante Skalarkrümmung. Somit übersetzt sich das Yamabe-Problem auch in ein Problem der Variationsrechnung.

Die verschiedenen Übersetzungen dieses Problems (geometrisch, nicht-lineare Eigenwert-Gleichung, Variationsrechnung) und deren Interaktion in den Beweisen sind Gründe dafür, wieso wir das Problem so interessant finden.

# 1. Analytische Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir analytische Hilfsmittel bereit, die zur Lösung des Yamabe-Problems benötigt werden.

## 1.1. Sobolev-Räume

Ist  $\mu$  ein Maß auf einem Raum  $M$ , dann definiert man für  $p \geq 1$  im Rahmen der Maßtheorie den Raum aller  $L^p$ -Funktionen auf  $M$ , den wir im folgenden mit  $L^p(M, \mu)$  bezeichnen wollen und dessen Definition wir kurz wiederholen wollen. Für  $p \in [1, \infty)$  definieren wir auf dem Raum der messbaren reellwertigen Funktionen die  $L^p$ -Norm als

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(M, \mu)} := \sqrt[p]{\int_M |u|^p d\mu} \in [0, \infty].$$

Für  $p = \infty$  ist die Norm definiert als

$$\|u\|_{L^\infty} := \operatorname{ess-sup}_{x \in M} |u(x)|.$$

Es gilt die Hölder-Ungleichung für  $p, p^* \in [1, \infty]$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ :

$$\|u \cdot v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^{p^*}}. \quad (1.1)$$

Zwei messbare Funktionen  $u_1, u_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$  sind *fast überall gleich*, falls  $u_1 - u_2 = 0$  außerhalb einer Nullmenge. In diesem Abschnitt schreiben wir hierfür auch  $u_1 \sim u_2$ . Für jedes  $p \in [1, \infty]$  gilt:

$$u_1 \sim u_2 \iff \|u_1 - u_2\|_{L^p} = 0.$$

$$L^p(M) := L^p(M, \mu) := \left\{ u : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|u\|_{L^p} < \infty \right\} / \sim.$$

**Übung 1.1 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung).** Seien  $p, q, r \geq 1$  mit  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Dann gilt für alle messbaren Funktionen  $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\|u \cdot v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \cdot \|v\|_{L^q}. \quad (1.2)$$

**Übung 1.2.** Seien  $1 \leq p < q$ . Dann gilt:

$$\|u\|_{L^p} \leq \mu(M)^{\frac{q-p}{pq}} \cdot \|u\|_{L^q}.$$

Ist nun  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer riemannschen Metrik  $g$ , so gibt es genau eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $M$  und genau ein Maß  $\mathrm{dvol}^g$  auf  $(M, \mathcal{A})$ , das *riemannsche Volumenmaß*, oft auch einfach  $\mathrm{dvol}$  geschrieben, mit den folgenden Eigenschaften.

- Alle offenen Teilmengen von  $M$  sind messbar.
- $(M, \mathcal{A}, \mathrm{dvol}^g)$  ist ein vollständig Maßraum.
- Ist  $U \xrightarrow{x} V$  eine Karte von  $M$ , in der die Metrik  $g$  die Koeffizienten  $g_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$  hat, dann gilt

$$x_* \left( \mathrm{dvol}^g|_U \right) = \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

Hierbei bezeichnet  $dx^1 dx^2 \dots dx^n$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 1.1.** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Vektorraum*

$$\mathcal{C}_c^\infty(M) := \{u : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt} \mid \text{supp}(u) \text{ kompakt}\}$$

*liegt dicht in  $L^p(M)$  für  $p \in [1, \infty)$ .*

*Beweisskizze.*

- (a) Seien  $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset M$  kompakte Mengen mit  $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = M$ . Für  $u \in L^p(M)$  setze  $u_j := \chi_{K_j} \cdot u$ , (wobei  $\chi_{K_j}$  charakteristische Funktion von  $K_j$ ). Dann ist der Träger von  $u_j$  in  $K_j$  enthalten, also kompakt, und  $u_j \in L^p(M)$ , da offensichtlich  $\|u_j\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p}$ . Wir haben also

$$|u_j - u|^p \leq (|u_j| + |u|)^p \leq \underbrace{(2|u|)^p}_{\text{integrierbar}}.$$

Ferner gilt  $|u_j - u|^p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  punktweise. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert dann

$$\|u_j - u\|_{L^p}^p = \int_M |u_j - u|^p \, \mathrm{dvol} \rightarrow \int_M 0 \, \mathrm{dvol} = 0,$$

also  $u_j \rightarrow u$  in  $L^p(M)$ . Wir haben gezeigt, dass  $L^p$ -Funktionen mit kompaktem Träger in  $L^p(M)$  dicht liegen.

- (b) Sei nun  $u \in L^p(M)$  mit kompaktem Träger  $K := \text{supp}(u)$ . Wähle eine glatte Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi \geq 0$ ,  $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|^2) \, dx = 1$ . Mit der Substitution  $x = \frac{x_0 - y}{\varepsilon}$ ,  $dx = \varepsilon^{-n} dy$  folgt  $\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{|x_0 - y|^2}{\varepsilon^2}\right) dy = 1$ .

In der riemannschen Geometrie wird gezeigt [24, Chap. 13], dass es eine stetige Funktion  $\text{injr} : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass

$$\{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) < \text{injr}(x)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)^2$$

glatt ist. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  mit

$$2\varepsilon < \inf_{x \in K} \text{inrad}(x)$$

setze wir nun:

$$u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \int_M \psi\left(\frac{d(x,y)^2}{\varepsilon^2}\right) u(y) \, \text{dvol}(y).$$

Die Funktion  $u_\varepsilon$  ist glatt und  $\text{supp}(u_\varepsilon)$  liegt in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $K$ . Für hinreichend kleines  $\varepsilon$  ist der Abschluss dieser  $\varepsilon$ -Umgebung ebenfalls kompakt, also  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ . Eine Rechnung zeigt, dass  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$  in  $L^p(M)$ .  $\square$

Das Lemma bedeutet: Wir hätten  $L^p(M)$  auch als Vervollständigung von  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{L^p}$  definieren können.

**Bemerkung.** Für  $p = \infty$  gilt das Lemma nicht: Die Vervollständigung von  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  bzgl.  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  liefert einen Raum, der nur aus stetigen Funktionen besteht.

**Definition 1.2.** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit einer riemannschen Metrik  $g$ . Wir sagen eine messbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist *lokal integrierbar*, falls jeder Punkt  $x \in M$  eine offene Umgebung  $U$  besitzt, so dass  $f|_U$  integrierbar ist. Lokale Integrierbarkeit ist zunächst bezüglich des Volumenmaßes  $\text{dvol}^g$  zu verstehen, aber man sieht leicht, dass diese Definition nicht von der Wahl von  $g$  abhängt. Wir definieren nun für  $p \in [1, \infty)$  den Vektorraum der *lokalen  $L^p$ -Funktionen* als

$$L_{\text{loc}}^p(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid |f|^p \text{ ist lokal integrierbar}\},$$

den wir auch kurz den *lokalen  $L^p$ -Raum* nennen.

Mit einem Überdeckungsargument sieht man, dass die lokal integrierbaren Funktionen  $L_{\text{loc}}^1(M)$  genau die messbaren Funktionen sind, die über jedes Kompaktum  $K \subset M$  integriert werden können.

**Lemma 1.3 (Gagliardo–Nirenberg).** Sei  $n \geq 2$ . Für alle  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{n}}$$

*Beweis.*

Exemplarisch für  $n = 3$ : Sei  $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  beliebig. Dann ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \, dx$$

$$= - \int_{x_0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \, dx.$$

Hier haben wir benutzt, dass  $u$  kompakten Träger hat, so dass keine Randterme bei  $\pm\infty$  auftreten. Es folgt

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leq \int_{-\infty}^{x_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| \, dx$$

und

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leq \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| \, dx.$$

Zusammen genommen erhält man also:

$$|u(x_0, y_0, z_0)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| \, dx.$$

Analog verfährt man mit der  $y$ - und  $z$ -Variable und erhält:

$$\begin{aligned} & |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0) \right| \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z) \right| \, dz \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Integration über  $x_0$  und Anwenden der Cauchy–Schwarz-Ungleichung (CSU) liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} \, dx_0 & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0) \right| \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z) \right| \, dz \right)^{\frac{1}{2}} \, dx_0}_{\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y, z_0) \right| \, dy \, dx_0 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z) \right| \, dz \, dx_0 \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Integration über  $y_0$  liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} \, dx_0 \, dy_0$$



$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z_0) \right| dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z) \right| dz dx_0 \right)^{\frac{1}{2}} dy_0 \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z_0) \right| dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right| dx dy_0 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z) \right| dz dx_0 dy_0 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Integration über  $z_0$  liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |u(x_0, y_0, z_0)|^{\frac{3}{2}} dx_0 dy_0 dz_0 \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) \right| dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) \right| dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \right| dx dy dz \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Also erhält man:

$$\|u\|_{L^{3/2}} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1}^{1/3} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^1}^{1/3} \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{L^1}^{1/3}$$

Der Beweis für  $n = 2$  geht ähnlich, benötigt aber nicht den Schritt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Im Fall  $n \geq 4$  ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung durch ein iteratives Anwenden der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung zu ersetzen, siehe Übung 1.1.  $\square$

**Übung 1.3.** Arbeiten Sie die Details des Beweises der Ungleichung im Fall  $n = 4$  aus.

**Bemerkung 1.4.** Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man wie im obigen Beweis, dass das Lemma von Gagliardo-Nirenberg auch im Fall  $n = 1$  gilt, wenn man  $L^{\frac{n}{n-1}}$  als  $L^\infty$  liest:

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L^1}.$$

Aus der trivialen Abschätzung  $|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\right|^2 + \dots + \left|\frac{\partial u}{\partial x^n}\right|^2 \geq \left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right|^2$  erhält man  $\left|\frac{\partial u}{\partial x^j}\right| \leq |\nabla u| \ \forall j$  und damit

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \left\| |\nabla u| \right\|_{L^1} =: \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^1}.$$

**Proposition 1.5.** Sei  $n \geq 2$ . Für alle  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und alle  $1 \leq p, q < \infty$  mit  $1 - \frac{n}{q} = -\frac{n}{p}$  gilt:

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \|\nabla u\|_{L^q}.$$

*Beweis.*

(a) *Idee:* Wir wollen  $\|\varphi\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^1}$  anwenden mit  $\varphi = |u|^{p \frac{n-1}{n}}$ .

Der Träger  $\text{supp}(\varphi) = \text{supp}(u)$  ist zwar kompakt, aber  $\varphi$  ist i. Allg. nicht überall differenzierbar. Setze daher für  $\varepsilon > 0$ :

$$\varphi_\varepsilon := (|u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n}} - \varepsilon^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Es gilt also:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^1}. \quad (1.3)$$

(b) Für die linke Seite von (1.3) erhält man nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}(x) \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{\frac{n}{n-1}}(x) \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

(c) Für die rechte Seite von 1.3 erhält man, wiederum mit majorisierter Konvergenz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^1} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_\varepsilon| \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} (|u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} - 1} \cdot 2|u| \cdot |\nabla u| \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2} \frac{n-1}{n} - 1} |u| \cdot |\nabla u| \, dx \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \cdot |\nabla u| \, dx \\
&= \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \left\| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \cdot |\nabla u| \right\|_{L^1}
\end{aligned}$$

(d) Bisher haben wir demnach erreicht:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n}} &\leq \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \left\| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \cdot |\nabla u| \right\|_{L^1} \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \left\| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \right\|_{L^{q^*}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q},
\end{aligned}$$

wobei  $q^*$  so gewählt ist, dass  $1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*}$  gilt. Die Relation zwischen  $p$ ,  $q$  und  $n$  in den Voraussetzungen der Proposition ist äquivalent zu  $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ . Daraus erhalten wir

$$\frac{p}{q^*} = p \left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) = p \frac{n-1}{n} - 1$$

finden wir für den  $u$ -Term der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\left\| |u|^{p \frac{n-1}{n} - 1} \right\|_{L^{q^*}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q^* (p \frac{n-1}{n} - 1)} \, dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \|u\|_{L^p}^{\frac{p}{q^*}} \\
&= \|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n} - 1}.
\end{aligned}$$

Kürzen von  $\|u\|_{L^p}^{p \frac{n-1}{n} - 1}$  liefert schließlich:

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{p}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \|\nabla u\|_{L^q}.$$

□

**Bemerkung 1.6.** Die Abbildung  $u \mapsto \|\nabla^k u\|_{L^p} := \|\sqrt{\langle \nabla^k u, \nabla^k u \rangle}\|_{L^p}$  ist eine Seminorm auf  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für  $R > 0$  definieren wir  $u_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_R(x) := u(Rx)$ . Dann gilt  $\|\nabla^k u_R\|_{L^p} = R^{k - \frac{n}{p}} \|\nabla^k u\|_{L^p}$ . Dieses Skalierungsverhalten motiviert, dass wir dieser Seminorm das *Gewicht*  $k - \frac{n}{p}$  zuordnen. Dann haben in Proposition 1.5 die beiden (Semi-)Normen  $\|\cdot\|_{L^p}$  und  $\|\nabla \cdot\|_{L^q}$  dasselbe Gewicht.

Im Spezialfall  $q = 2$ , also  $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}$ , also  $p = \frac{2n}{n-2}$  gilt somit:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2 &\leq \left( \frac{2n}{n-2} \cdot \frac{n-1}{2n} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \right)^2 \\ &= \left( \frac{n-1}{n-2} \right)^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Sei nun  $\sigma_n$  die optimale Konstante in dieser Abschätzung, d. h.

$$\sigma_n := \sup_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2}{\|\nabla u\|_{L^2}^2}.$$

Es gilt also:

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq \sqrt{\sigma_n} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \quad \text{und} \quad \sigma_n \leq \left( \frac{n-1}{n-2} \right)^2.$$

**Definition 1.7.**  $\sigma_n$  heißt *Sobolev-Konstante* von  $\mathbb{R}^n$  in Dimension  $n \geq 3$ .

Wir werden später in der Vorlesung, in Abschnitt 6.1 mit geometrischen Methoden die Sobolev-Konstante bestimmen:

$$\sigma_n = \frac{4}{n(n-2)} \omega_n^{-2/n}, \tag{1.4}$$

wobei  $\omega_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Standard-Sphäre  $S^n = (S^n, g_{\text{sph}})$  ist. Nun übertragen wir diese Abschätzungen vom  $\mathbb{R}^n$  auf Mannigfaltigkeiten.

**Satz 1.8.** Sei  $n \geq 2$ , und sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Dann gilt:

- (i) Für alle  $p, q \in [1, \infty)$  mit  $1 - \frac{n}{q} = -\frac{n}{p}$  gibt es eine Konstante  $C_1 > 0$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{L^p}^q \leq p^q \|\nabla u\|_{L^q}^q + C_1 \|u\|_{L^q}^q \quad \forall u \in C^\infty(M). \tag{1.5}$$

- (ii) Im Spezialfall  $n \geq 3$ ,  $q = 2$  haben wir: für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $C_2 = C_2(g, \varepsilon) > 0$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2 \leq (1 + \varepsilon) \sigma_n \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_2 \|u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in C^\infty(M). \tag{1.6}$$

*Beweis.*

- (a) Sei  $0 < \delta < 1$ . In riemannschen Normalkoordinaten<sup>1</sup>  $U \xrightarrow{\varphi} V$  um einen Punkt  $x_0$  in  $M$  gilt  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ , d. h. alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix  $(g_{ij}(0))_{i,j}$  sind 1. Nach eventueller Verkleinerung der Koordinatenumgebung von  $U$  zu  $U_1 \subset U$  liegen für alle  $x \in U_1$  alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix  $(g_{ij}(x))_{i,j}$  in dem Intervall  $[1 - \delta, 1 + \delta]$ . Für das riemannsche Volumenelement in dieser Koordinatenumgebung gilt dann  $(1 - \delta)^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\det g_{ij}(x)} \leq (1 + \delta)^{\frac{n}{2}}$ . Für einen beliebigen Tangentialvektor  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$  gilt ferner:

$$(1 - \delta) \sum_{i=1}^n (Y^i)^2 \leq g(Y, Y) = \sum_{j=1}^n g_{ij} Y^i Y^j \leq (1 + \delta) \sum_{i=1}^n (Y^i)^2.$$

Wenn wir also

$$|Y|_{\text{eucl}} := \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y^i)^2}$$

setzen, dann bekommen wir

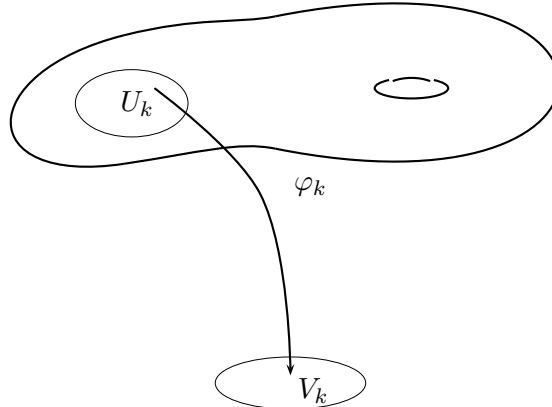
$$(1 - \delta)^{\frac{1}{2}} |Y|_{\text{eucl}} \leq |Y|_g \leq (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} |Y|_{\text{eucl}} \quad \forall Y \in TU.$$

Eine analoge Aussage können wir für die inverse Matrix  $g^{ij}$  erreichen, in dem wir die Koordinaten Umgebungen nochmals eventuell verkleinern. Wir erhalten dann

$$(1 - \delta) |\eta|_{\text{eucl}}^2 \leq \sum_{j=1}^n g^{ij} \eta_i \eta_j \leq (1 + \delta) |\eta|_{\text{eucl}}^2 \quad \forall \eta \in T^*U. \quad (1.7)$$

- (b) Überdecke  $M$  durch riemannsche Normalkoordinatensysteme wie in (a). Da  $M$  kompakt ist, genügen  $\ell < \infty$  solche Koordinatensysteme  $U_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_1, \dots, U_\ell \xrightarrow{\varphi_\ell} V_\ell$ , um  $M$  zu überdecken.

Wähle eine zugehörige Partition der Eins, d. h. Funktionen  $\alpha_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit  $\text{supp}(\alpha_k) \subset U_k$ ,  $\alpha_k \geq 0$  und  $\sum_{k=1}^\ell \alpha_k = 1$ .



Wähle die Funktionen  $\alpha_k$  so, dass in allen Nullstellen von  $\alpha_k$  auch alle Ableitungen von  $\alpha_k$  verschwinden: Dann sind mit  $\alpha_k$  auch die Funktionen  $\alpha_k^{\frac{1}{q}}$  glatt.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Normalkoordinaten bilden eine bis aus Rotationen kanonische Karte  $M \ni U \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbb{R}^n$  um einen fixierten Punkt einer riemannschen Mannigfaltigkeit herum, siehe [13, Abschnitt 2.6] insbesondere Korollar 2.6.11..

<sup>2</sup>Dies folgt aus dem Satz von Taylor: Ist z.B.  $\alpha : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und verschwinden alle Ableitungen bei

(c) Für  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gilt nun:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p}^q &= \left( \int_M |u|^p \, \text{dvol} \right)^{\frac{q}{p}} = \left( \int_M |u|^{q \frac{p}{q}} \, \text{dvol} \right)^{\frac{q}{p}} \\
&= \| |u|^q \|_{L^{\frac{p}{q}}}^{\frac{q}{p}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k |u|^q \right\|_{L^{\frac{p}{q}}} \leq \sum_{k=1}^{\ell} \left\| \alpha_k |u|^q \right\|_{L^{\frac{p}{q}}} \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \left( \int_{U_k} (\alpha_k |u|^q)^{\frac{p}{q}} \, \text{dvol} \right)^{\frac{q}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \left( \int_{V_k} (\alpha_k^{\frac{p}{q}} |u|^p) \circ \varphi_k^{-1}(x) \cdot \underbrace{\sqrt{\det g_{ij}^{(k)}(x)}}_{\leq (1+\delta)^{\frac{n}{2}}} \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq (1+\delta)^{\frac{nq}{2p}} \sum_{k=1}^{\ell} \left( \int_{V_k} \left( \alpha_k^{\frac{p}{q}} |u|^p \right) \circ \varphi_k^{-1}(x) \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \\
&= (1+\delta)^{\frac{nq}{2p}} \sum_{k=1}^{\ell} \left\| \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} |u| \right) \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q.
\end{aligned}$$

Man kann hier noch offensichtlich  $|u|$  durch  $u$  ersetzen.

(d) Wir betrachten zuerst den Fall (i), also für allgemeines  $q$ . Wir schätzen ab, wobei wir an der Stelle (\*) die Abschätzungen im  $\mathbb{R}^n$ , d. h. Proposition 1.5, anwenden:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \cdot u \right) \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \left( p \frac{n-1}{2n} \right)^q \left\| \nabla \left( \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \cdot u \right) \circ \varphi_k^{-1} \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\
&= \left( p \frac{n-1}{2n} \right)^q \left\| \nabla \left( \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot \left( u \circ \varphi_k^{-1} \right) \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\
&= \left( p \frac{n-1}{2n} \right)^q \left\| \nabla \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot \left( u \circ \varphi_k^{-1} \right) + \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot \nabla \left( u \circ \varphi_k^{-1} \right) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q
\end{aligned}$$

$t = 0$ , so liefert die Restgliedabschätzung aus dem Satz von Taylor  $\alpha(t) = O(t^m)$  für jedes  $m$ . Für den Differenzenquotienten von  $\alpha^{1/q}$  findet man daher bei hinreichend groß gewähltem  $m$ :

$$\left| \frac{\alpha(t)^{\frac{1}{q}} - 0}{t - 0} \right| = \frac{|\alpha(t)|^{\frac{1}{q}}}{|t|} \leq \frac{(Ct^m)^{\frac{1}{q}}}{t} = C^{\frac{1}{q}} |t|^{\frac{m}{q} - 1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Also ist  $\alpha^{1/q}$  in 0 differenzierbar mit Ableitung 0. Analog für die höheren Ableitungen.

$$\begin{aligned}
&\leq 2^q \left( p \frac{n-1}{2n} \right)^q \max \left( \left\| \nabla \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q, \right. \\
&\quad \left. \left\| \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot \nabla (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \right) \\
&\leq \left( p \frac{n-1}{n} \right)^q \left( \left\| \nabla \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + \left\| \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot \nabla (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \right) \\
&\leq \left( p \frac{n-1}{n} \right)^q \left( C \cdot \|u \circ \varphi_k^{-1}\|_{L^q(V_k)}^q + \left\| \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \cdot \nabla (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^q(V_k)}^q \right),
\end{aligned}$$

wobei

$$C := \left\| \nabla \left( \alpha_k^{\frac{1}{q}} \circ \varphi_k^{-1} \right) \right\|_{L^\infty(V_k)} < \infty.$$

Für den ersten Term erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|u \circ \varphi_k^{-1}\|_{L^q(V_k)}^q &= \int_{V_k} |u|^q \circ \varphi_k^{-1}(x) \, dx \\
&\leq (1-\delta)^{-n/2} \int_{V_k} |u|^q \circ \varphi_k^{-1}(x) \sqrt{\det g_{ij}(x)} \, dx \\
&= (1-\delta)^{-n/2} \int_{U_k} |u|^q \, d\text{vol} \\
&\leq (1-\delta)^{-n/2} \int_M |u|^q \, d\text{vol} \\
&= (1-\delta)^{-n/2} \|u\|_{L^q(M)}^q.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left\| \left( \alpha_k^{1/q} \circ \varphi_k^{-1} \right) \nabla (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^q(V_k)}^q &= \int_{V_k} \left( (\alpha_k \circ \varphi_k^{-1})(x) \underbrace{|\nabla(u \circ \varphi_k^{-1})|_{\text{eukl}}(x)}_{\leq (1-\delta)^{-1/2} |\nabla u|_g \circ \varphi_k^{-1}} \right)^q dx \\
&\leq (1-\delta)^{-q/2} \int_{V_k} (\alpha_k |\nabla u|_g^q) \circ \varphi_k^{-1}(x) \, dx \\
&\leq (1-\delta)^{-(q+n)/2} \int_{V_k} (\alpha_k |\nabla u|_g^q) \circ \varphi_k^{-1}(x) \sqrt{\det g_{ij}(x)} \, dx \\
&= (1-\delta)^{-(q+n)/2} \int_{U_k} (\alpha_k |\nabla u|_g^q) \, d\text{vol}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir gemäß (1.7) folgendermaßen die Ableitung von  $u$  in der Metrik  $g$

gegen ihre euklidische Länge abgeschätzt:

$$|\nabla u|_g^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \varphi_i} \frac{\partial u}{\partial \varphi_j} g^{ij} \geq (1-\delta) \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi_j} \right)^2.$$

Beide Terme zusammen genommen ergeben also:

$$\begin{aligned} & \left\| \left( \alpha_k^{1/q} \cdot u \right) \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\ & \leq \left( p \frac{n-1}{n} \right)^q (1-\delta)^{-(n+q)/2} \left( \underbrace{C}_{\leq 1} (1-\delta)^{q/2} \|u\|_{L^q(M)}^q + \int_{U_k} \alpha_k |\nabla u|^q \, \text{dvol} \right) \end{aligned}$$

Summation über  $k$  liefert daraus:

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^p(M)}^q \\ & \leq (1+\delta)^{\frac{nq}{2p}} \left( p \frac{n-1}{n} \right)^q (1-\delta)^{-(n+q)/2} \sum_{k=1}^{\ell} \left( C \cdot \|u\|_{L^q(M)}^q + \int_{U_k} \alpha_k |\nabla u|^q \, \text{dvol} \right) \\ & = (1+\delta)^{\frac{nq}{2p}} \left( p \frac{n-1}{n} \right)^q (1-\delta)^{-(n+q)/2} \left( \ell \cdot C \cdot \|u\|_{L^q(M)}^q + \int_M |\nabla u|^q \, \text{dvol} \right). \end{aligned}$$

Wählen wir nun  $\delta > 0$  so klein, dass

$$(1+\delta)^{\frac{nq}{2p}} \cdot (1-\delta)^{-(n+q)/2} < \left( \frac{n}{n-1} \right)^q$$

ist, so folgt (i).

- (e) Im Fall  $q = 2$  wählen wir die Abschätzungen im  $\mathbb{R}^n$  mit optimaler Konstante  $\sigma_n$  statt  $\left( p \frac{n-1}{2n} \right)^q$  und erhalten daraus unter Nutzung von Proposition 1.5 an der Stelle (\*) und der Ungleichung<sup>3</sup>

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + \delta^2 a^2 + \delta^{-2} b^2$$

in der Ungleichung (+).

$$\begin{aligned} & \left\| \left( \alpha_k^{1/2} \cdot u \right) \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & \stackrel{(*)}{\leq} \sigma_n \left\| \nabla \left( \left( \alpha_k^{1/2} \cdot u \right) \circ \varphi_k^{-1} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Die Ungleichung  $2ab \leq \delta^2 a^2 + \delta^{-2} b^2$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  wird oft auch als Peter-Paul-Ungleichung bezeichnet.



$$\begin{aligned}
&\leq \sigma_n \left( \left\| (\alpha_k^{1/2} \circ \varphi_k^{-1}) \nabla (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\| (u \circ \varphi_k^{-1}) \cdot \nabla (\alpha_k^{1/2} \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^2 \\
&\stackrel{(+)}{\leq} \sigma_n \left( (1 + \delta^2) \left\| (\alpha_k^{1/2} \circ \varphi_k^{-1}) \nabla (u \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \left\| (u \circ \varphi_k^{-1}) \nabla (\alpha_k^{1/2} \circ \varphi_k^{-1}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\
&\stackrel{(\dagger)}{\leq} \sigma_n \left( (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-1} \left\| |\alpha_k^{1/2} \nabla u|_g \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) (1 - \delta)^{-1} \left\| (|u \nabla \alpha_k^{1/2}|_g) \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\
&\leq \sigma_n \left( (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-1} \left\| (\alpha_k^{1/2} |\nabla u|_g) \circ \varphi_k^{-1} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \underbrace{C(\delta) \|u \circ \varphi_k^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}_{\leq (1-\delta)^{-n/2} \|u\|_{L^2(M)}^2} \right) \\
&\leq \sigma_n (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-1} (1 - \delta)^{-n/2} \int_{U_k} \alpha_k |\nabla u|_g^2 \, \text{dvol} + C'(\delta) \|u\|_{L^2(M)}^2.
\end{aligned}$$

In der Ungleichung  $(\dagger)$  nutzten wir  $|\nabla v|_{\text{eukl}}^2 \leq (1 - \delta)^{-1} |\nabla v|_g^2$ . Summation über  $k = 1, \dots, \ell$  liefert:

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq (1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-\frac{n+2}{2}} \sigma_n \|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + \ell \cdot C'(\delta) \|u\|_{L^2(M)}^2.$$

Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle nun  $\delta > 0$  so klein und passendes  $\ell = \ell(\delta)$ , dass

$$(1 + \delta)^{\frac{nq}{2p}} (1 + \delta^2) (1 - \delta)^{-\frac{n+2}{2}} < 1 + \varepsilon.$$

Damit ist (ii) gezeigt. □

Für  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  setze

$$\begin{aligned}
\nabla^0 u &:= u \\
\nabla u &:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} \, dx^i
\end{aligned}$$

und induktiv unter Nutzung der kovarianten Ableitung von  $(0, k)$ -Tensoren:

$$\nabla^{k+1} u := \nabla(\nabla^k u).$$

**Beispiel 1.9.** Für  $i = 2$  berechnen wir den Ausdruck in lokalen Koordinaten unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \right) \\
 &= \nabla \frac{\partial u}{\partial x^i} \otimes dx^i + \frac{\partial u}{\partial x^i} \nabla (dx^i) \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \otimes dx^i - \frac{\partial u}{\partial x^i} \Gamma_{jm}^i dx^j \otimes dx^m \\
 &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial u}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^k \right) dx^j \otimes dx^i,
 \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
 \left( \nabla \frac{\partial}{\partial x^j} dx^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right) &= \nabla \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{\left( dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right)}_{=\delta_{im}, \text{ also konst.}} - dx^i \left( \nabla \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\
 &= -dx^i \left( \Gamma_{jm}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\
 &= -\Gamma_{jm}^i,
 \end{aligned}$$

also

$$\nabla dx^i = -\Gamma_{jm}^i dx^j \otimes dx^m.$$

Wir betrachten jetzt die punktweise gebildeten Normen

$$\begin{aligned}
 |\nabla^0 u|^2 &= |u|^2 \\
 |\nabla u|^2 &= g \left( \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i, \frac{\partial u}{\partial x^j} dx^j \right) = \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} g(dx^i, dx^j) = \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} g^{ij} \\
 |\nabla^2 u|^2 &= \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ji}^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \right] \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} - \Gamma_{j'i'}^k \frac{\partial u}{\partial x^{k'}} \right] \underbrace{\left\langle dx^i \otimes dx^j, dx^{i'} \otimes dx^{j'} \right\rangle}_{g^{ii'} g^{jj'}}.
 \end{aligned}$$

**Definition 1.10.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Die Norm

$$\|u\|_{H^{k,p}} := \left( \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

<sup>4</sup>Die Einstein'sche Summenkonvention wird von Leuten geschätzt, die viel in lokalen Koordinaten rechnen, z. B. von vielen Physikern. Sie besagt, dass man einen Index, der in einem Ausdruck doppelt vorkommt, einmal oben und einmal unten, immer als Summationsindex auffasst, das entsprechende Summenzeichen aber weglässt. Man schreibt also z. B. statt  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$  einfach  $\frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$ .

heißt *Sobolev-Norm*.

Hierbei werden alle punktweise Normen bezüglich der riemannschen Metrik  $g$  gebildet und die  $L^p$ -Normen werden bezüglich des riemannschen Volumenlements  $d\text{vol}$  gebildet. Damit definiert man die *Sobolev-Räume*:

$$\dot{H}^{k,p}(M) := \text{Vervollständigung von } \mathcal{C}_c^\infty(M) \text{ bzgl. } \|\cdot\|_{H^{k,p}}$$

$$H^{k,p}(M) := \text{Vervollständigung von } \{u \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \|u\|_{H^{k,p}} < \infty\} \text{ bzgl. } \|\cdot\|_{H^{k,p}}.$$

Dem Sobolev-Raum  $H^{k,p}(M)$  bzw. der zugehörigen Norm ordnen wir das *Gewicht*  $k - \frac{n}{p}$  zu, wobei  $n/\infty$  als 0 zu lesen ist.

**Bemerkung 1.11.** Nach Definition und wegen Lemma 1.1 gilt für  $p < \infty$

$$\dot{H}^{0,p}(M) = H^{0,p}(M) = L^p(M).$$

**Übung 1.4.** Sei  $1 \leq p, q < \infty$ . Folgende Normen sind äquivalent:

$$(1) \|u\|_1 := \|u\|_{H^{k,p}}$$

$$(2) \|u\|_2 := \max_{j=0 \dots k} \|\nabla^j u\|_{L^p}$$

$$(3) \|u\|_3 := \left( \sum_{j=0}^k \|\nabla^j u\|_{L^p}^q \right)^{1/q}$$

**Bemerkung 1.12.** Sind  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Vektorräume, ist  $U \subset X$  ein Untervektorraum und  $U \subset Y$  ebenfalls ein Untervektorraum, und ist  $\iota : X \rightarrow Y$  eine stetige lineare Abbildung mit  $\iota(u) = u$  für alle  $u \in U$ , dann gibt es ein  $C > 0$  so dass gilt:

$$\|\iota(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

insbesondere

$$\|u\|_Y \leq C \cdot \|u\|_X \quad \forall u \in U.$$

Umgekehrt gilt: Sind  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-Räume, ist  $U \subset X$  dicht und gibt es ein  $C > 0$  mit

$$\|u\|_Y \leq C \cdot \|u\|_X \quad \forall u \in U, \tag{1.8}$$

dann setzt sich  $\text{id}_U$  stetig linear auf  $X$  fort: Für gegebenes  $x \in X$  wähle  $u_i \in U$  mit  $u_i \xrightarrow{X} x$ . Dann ist  $(u_i)_i$  eine  $X$ -Cauchyfolge, also mit (1.8) auch eine  $Y$ -Cauchyfolge. Da  $Y$  vollständig ist, gibt es ein  $y \in Y$  mit  $u_i \xrightarrow{Y} y$ . Setze nun  $\iota(x) := y$ .

(a) *Wohldefiniertheit:* Ist  $u'_i$  eine weitere Folge in  $X$  mit  $u'_i \xrightarrow{X} x$ , so ist  $(u_i - u'_i)$  eine Nullfolge in  $X$ , also auch in  $Y$ , d. h.  $u'_i \xrightarrow{Y} y$ .

- (b) *Linearität:* Zu  $x, x' \in X$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  wähle Folgen  $u_i, u'_i$  in  $X$  mit  $u_i \xrightarrow{X} x, u'_i \xrightarrow{X} x'$ . Dann gilt  $u_i \xrightarrow{Y} \iota(x)$  und  $u'_i \xrightarrow{Y} \iota(x')$  sowie  $\alpha u_i + \beta u'_i \xrightarrow{X} \alpha x + \beta x'$ , so dass:

$$\begin{array}{ccc} \alpha u_i + \beta u'_i & \xrightarrow{Y} & \iota(\alpha x + \beta x') \\ \downarrow Y & & \\ \alpha \iota(x) + \beta \iota(x') & & \end{array}$$

- (c) *Stetigkeit:*

$$\begin{aligned} \|\iota(x)\|_Y &= \left\| \text{Y-lim}_{i \rightarrow \infty} (u_i) \right\|_Y \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|_Y \\ &\leq C \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|_X \\ &= C \left\| \text{X-lim}_{i \rightarrow \infty} (u_i) \right\|_X \\ &= C \|x\|_X. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet X-lim bzw. Y-lim den Grenzwert im Banachraum  $X$  bzw.  $Y$ .

- (d) *Injektivität von  $\iota$*  ist äquivalent zu: Jede  $\|\cdot\|_X$ -Cauchyfolge in  $U$ , die  $\|\cdot\|_Y$ -Nullfolge ist, ist auch  $\|\cdot\|_X$ -Nullfolge.

Dies ist nicht immer der Fall: Man kann Banachräume  $X$  und  $Y$  mit einer gemeinsamen dichten Teilmenge  $U$  konstruieren, so dass die Fortsetzung von  $\text{id}_U$  zu einer stetigen Abbildung  $X \rightarrow Y$  nicht injektiv ist.

Falls  $\iota : X \rightarrow Y$  injektiv ist, dann identifizieren wir  $X$  mit  $\iota(X)$  und schreiben  $X \subset Y$ .

**Bemerkung 1.13.**

- (1) Die Aussagen von Proposition 1.5 und Satz 1.8 kann man demnach so formulieren: Ist  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ , so gilt:

$$H^{1,q}(M) \subset L^p(M)$$

und die Inklusionsabbildung ist stetig für alle  $p, q \in [1, \infty)$  mit  $1 - \frac{n}{q} = -\frac{n}{p}$ .

Den Beweis der Injektivität wollen wir nur skizzieren: Hierzu definiert man

$$\tilde{H}^{k,p}(M) := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(M) \mid \|\nabla^i u\|_{L^p} < \infty \text{ für alle } i \in \{0, 1, \dots, k\} \right\}.$$

Diese Definition ist sinnvoll für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und alle  $p \in [1, \infty]$ . Wir identifizieren wieder Funktionen  $u_1$  und  $u_2$ , die außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Zur Erinnerung: wir haben in Definition 1.2 festgelegt, dass eine messbare Funktion  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann in  $L^1_{\text{loc}}(M)$ , falls jeder Punkt von  $M$  eine offene Umgebung  $U$  in  $M$  besitzt, so dass  $u|_U \in L^1(U)$ . Man kann für jedes  $u \in L^1_{\text{loc}}(M)$  in

einem schwachen Sinne die iterierte Ableitung  $\nabla^i u$  definieren. Am konzeptionellsten ist hierbei die Verwendung von Distributionen. Für eine Funktion  $u$  definiert man hierfür  $D_u : \mathcal{C}_c^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $D_u(v) := \int_M uv \, d\text{vol}$ . Wir nennen  $D_u$  die zu  $u$  assoziierte Distribution. Da die Abbildung  $u \mapsto D_u$  injektiv ist, ist es sinnvoll  $u \in L_{\text{loc}}^1(M)$  mit  $D_u \in \mathcal{C}_c^\infty(M)^* = \text{Hom}(\mathcal{C}_c^\infty(M), \mathbb{R})$  zu identifizieren. Auf ähnliche Art und Weise kann man verfahren, wenn  $u$  ein  $L_{\text{loc}}^1$ -Schnitt eines Vektorbündels  $V \rightarrow M$  mit (faserweisem) Skalarprodukt ist. Dann ist  $D_u \in \Gamma_c(V)^*$  wobei  $\Gamma_c(V)$  die glatten Schnitte von  $V \rightarrow M$  mit kompaktem Träger bezeichnet. Wir sagen  $u$  repräsentiert die Distribution  $D_u$ .

Für Distributionen kann man nun beliebige Ableitungen definieren, so dass dies die klassische Ableitung verallgemeinert. Insbesondere definiert man  $\nabla^i D_u \in \Gamma_c(T^{(0,i)}M)^*$  als  $\nabla^i D_u(f) := D_u((\nabla^*)^i f)$ , wobei  $\nabla^*$  der zu  $\nabla$  adjungierte Operator bezüglich des natürlichen  $L^2$ -Skalarprodukts auf  $(0, i)$ -Tensoren ist. Die weiteren Definitionen sind nun so gewählt, dass  $\|\nabla^i u\|_{L^p} < \infty$  genau dann gilt, wenn  $\nabla^i D_u$  von einem  $L^p$ -Schnitt von  $T^{(0,i)}M$  repräsentiert wird.

Man zeigt nun, dass die  $H^{k,p}$ -Sobolev-Norm auf  $\tilde{H}^{k,p}(M)$  wohldefiniert ist und diesem die Struktur eines vollständigen normierten Vektorraums verleiht. Des weiteren zeigt man für  $p < \infty$ , dass der Raum der glatten Funktionen mit endlicher  $H^{k,p}$ -Norm dicht in  $\tilde{H}^{k,p}(M)$  ist. Es folgt, dass  $\tilde{H}^{k,p}(M)$  ein zu  $H^{k,p}(M)$  isometrischer normierter Vektorraum ist, falls  $p < \infty$ .

Da nun alle oben definierten Sobolev-Räume als Teilmenge von  $L_{\text{loc}}^1$  realisiert sind, folgt die Injektivität.

Details dieser Techniken sind für  $M = \mathbb{R}^n$  in [1, Abschnitt 1.15] ausgeführt. Diese kann man leicht auf die vorliegende Situation anpassen. Weitere Referenzen zu Distributionen sind [L. Jantscher, Distributionen, de Gruyter] und [W. Walter, Theorie der Distributionen, BI Wissenschaftsverlag]. Eine mehr physikalisch orientierte Einführung ist [F. Constantinescu, Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik, Teubner].

- (2) Mit Hilfe unserer Vervollständigung haben wir  $H^{k,p}(M)$  bisher nur für  $p < \infty$  definiert. Wir werden in diesem Buch nur diesen Fall benötigen, erwähnen der Vollständigkeits halber aber auch den Fall  $p = \infty$ . Man definiert  $H^{k,\infty}(M) := \tilde{H}^{k,p}(M)$ . Da aber die stetigen Funktionen nicht dicht in  $L^\infty(M)$  liegen, ist  $H^{k,\infty}(M)$  nicht mehr die Vervollständigung der glatten Funktionen in  $H^{k,\infty}(M)$ .

**Proposition 1.14.** *Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ . Wir setzen voraus, dass wir für alle  $q, p_1 \in [1, n)$  mit  $1 - \frac{n}{q} = -\frac{n}{p_1}$  stetige Inklusionen*

$$H^{1,q}(M) \subset L^{p_1}(M) \quad (1.9)$$

*haben. Dann haben wir für alle  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  und alle  $q \in [1, n/\ell)$  und alle  $p_\ell$  mit  $\ell - \frac{n}{q} = -\frac{n}{p_\ell}$*

$$H^{k+\ell,q}(M) \subset H^{k,p_\ell}(M) \quad (1.10)$$

Dieselbe Aussage gilt auch, wenn wir in (1.9)  $H^{1,q}(M)$  durch  $\mathring{H}^{1,q}(M)$  und in (1.10)  $H^{k+\ell,q}(M)$  durch  $\mathring{H}^{k+\ell,q}(M)$  ersetzen.

*Beweis.*

(a) Der Fall  $\ell = 0$  ist trivial.

(b) Betrachten wir zunächst  $\ell = 1$ . Sei  $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap H^{k+1,q}(M)$  bzw.  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$  und  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Für  $\varepsilon > 0$  setze  $\varphi_\varepsilon := \sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(M)$  bzw.  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ . Wir wollen die Ableitung  $\nabla \varphi_\varepsilon = d\varphi_\varepsilon$  abschätzen. Dazu rechnen wir für  $\xi \in TM$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \varphi_\varepsilon &= \frac{2 \langle \nabla_\xi \nabla^j u, \nabla^j u \rangle}{2\sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2}} \\ &= \left\langle \nabla_\xi \nabla^j u, \frac{\nabla^j u}{\sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2}} \right\rangle \\ |\nabla_\xi \varphi_\varepsilon| &\leq |\nabla_\xi \nabla^j u| \cdot \frac{|\nabla^j u|}{\sqrt{|\nabla^j u|^2 + \varepsilon^2}} \\ &\leq |\nabla_\xi \nabla^j u|. \end{aligned}$$

Mit einem orthonormalen Rahmen  $e_1, \dots, e_n$  rechnen wir dann

$$|\nabla \varphi_\varepsilon| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\nabla_{e_k} \varphi_\varepsilon|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |\nabla_{e_k} \nabla^j u|^2} = |\nabla^{j+1} u|$$

Für  $\varphi_\varepsilon$  verlangen nun die bzw.  $\mathring{H}^{1,q}(M) \subset L^{p_1}(M)$ : Es gibt Konstanten  $C, C' > 0$  so dass gilt:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{p_1}} \leq C \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{H^{1,q}} \leq C' \left( \|\varphi_\varepsilon\|_{L^q} + \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \right).$$

Da  $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |\nabla^j u|$  punktweise, folgt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon &\longrightarrow \|\nabla^j u\|_{L^{p_1}} \\ \|\varphi_\varepsilon\|_{L^q} &\longrightarrow \|\nabla^j u\|_{L^q}, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq \|\nabla^{j+1} u\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Zusammen genommen folgt also:

$$\|\nabla^j u\|_{L^{p_1}} \leq C' \left( \|\nabla^j u\|_{L^q} + \|\nabla^{j+1} u\|_{L^q} \right).$$

Summation über  $j = 0 \dots k$  liefert schließlich:  $\|u\|_{H^{k,p_1}} \leq C'' \|u\|_{H^{k+1,q}}$  für ein  $C'' > 0$  und damit die Behauptung für  $\ell = 1$ .

(c) Induktion über  $\ell$  liefert für geeignete  $p_1, \dots, p_\ell \in [1, \infty)$

$$k + \ell - \frac{n}{q} = k + \ell - 1 - \frac{n}{p_1} = k + \ell - 2 - \frac{n}{p_2} = \dots = k + \ell - \ell - \frac{n}{p_\ell} :$$

$$\begin{aligned} H^{k+\ell, q}(M) &= H^{(k+\ell-1)+1, q}(M) \\ &\subset H^{k+\ell-1, p_1}(M) \\ &\subset H^{k+\ell-2, p_2}(M) \\ &\vdots \\ &\subset H^{k, p_\ell}(M). \end{aligned}$$

□

Wir haben damit bewiesen:

**Satz 1.15 (Sobolev'scher Einbettungssatz, 1. Teil).** *Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ . Dann haben wir für alle  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $p, q \in [1, \infty)$  mit  $k + \ell - \frac{n}{q} = k - \frac{n}{p}$  stetige Inklusionen*

$$H^{k+\ell, q}(M) \subset H^{k, p}(M). \quad (1.11)$$

**Bemerkung 1.16.**

(a) Mit überschaubarem Aufwand kann man diesen Satz auch für Sobolev-Räume mit Werten in Vektorbündeln zeigen, zum Beispiel für Tensor-Bündel. In der Notation von Definition 1.27 erhält man dann stetige Inklusionen

$$H^{k+\ell, q}(T^{(r, s)} M) \subset H^{k, p}(T^{(r, s)} M)$$

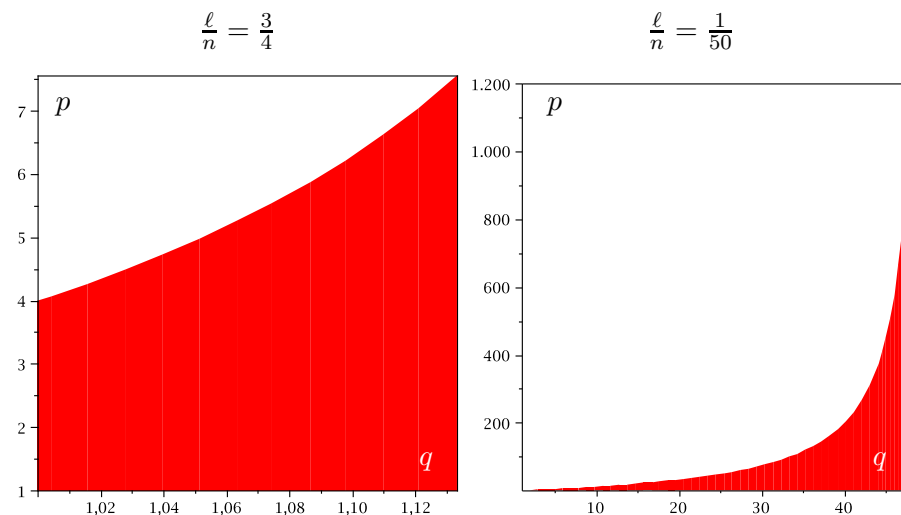
für alle  $r, s \in \mathbb{N}_0$  und alle  $k, \ell, q, p$  wie im Satz.

(b) Die Bedingung  $k + \ell - \frac{n}{q} = k - \frac{n}{p}$  merkt man sich am besten wie folgt: das in Definition 1.10 definierte Gewicht von  $H^{k+\ell, q}(M)$  ist gleich dem Gewicht von  $H^{k, p}$ .

(c) Ist  $M$  kompakt und  $1 \leq p' < p$ , so ist nach Übung 1.1  $L^p(M) \subset L^{p'}(M)$ , also auch  $H^{k, p}(M) \subset H^{k, p'}(M)$ . Somit ist

$$H^{k+\ell, q}(M) \subset H^{k, p_\ell}(M) \subset H^{k, p}(M) \quad \text{für } p \leq p_\ell.$$

Hierbei ist  $p \leq p_\ell$  äquivalent zu  $k + \ell - \frac{n}{q} \geq k - \frac{n}{p}$  und äquivalent zu  $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} - \frac{\ell}{n}$ . In den beiden folgenden Abbildungen wird für  $\frac{\ell}{n} = \frac{3}{4}$  bzw. für  $\frac{\ell}{n} = \frac{1}{50}$  der Bereich in der  $q$ - $p$ -Ebene rot markiert, für den wir die stetigen Inklusionen  $H^{k+\ell, q}(M) \subset H^{k, p}(M)$  haben.



## 1.2. Kompaktheit

**Proposition 1.17.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $(X, d)$  ist **überdeckungskompakt**, d. h. jede offene Überdeckung von  $X$  enthält eine endliche Teilüberdeckung.
- (ii)  $(X, d)$  ist **folgenkompakt**, d. h. jede Folge in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (iii)  $(X, d)$  ist vollständig und **präkompakt**, d. h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_{N(\varepsilon)} \in X$  mit  $X = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i)$ .

*Beweis.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii):

Angenommen,  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge in  $X$  ohne Häufungspunkt. Dann gilt:  $\forall y \in X \exists r_y > 0$  mit  $\#\{k \mid x_k \in B_{r_y}(y)\} < \infty$ .  $(B_{r_y}(y))_{y \in X}$  ist eine offene Überdeckung von  $X$ , nach (i) gibt es also  $y_1, \dots, y_m$  mit  $X = \bigcup_{i=1}^m B_{r_{y_i}}(y_i)$ . Damit ist  $\#\{k \mid x_k \in X\} < \infty$  im Widerspruch zur Annahme, dass  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  ist.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):

- (a) Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Nach (ii) besitzt  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt in  $x \in X$ ; also  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ . Damit ist die Vollständigkeit von  $(X, d)$  gezeigt.



- (b) Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass keine endliche Auswahl von  $\varepsilon$ -Bällen  $X$  überdeckt. Wähle  $x_1 \in X$  beliebig. Wähle induktiv  $x_{k+1} \in X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_k))$ . Nach Konstruktion ist  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  für alle  $i \neq j$ . Insbesondere besitzt die Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  – im Widerspruch zu (ii) – keinen Häufungspunkt. Damit ist die Präkompaktheit gezeigt.

(iii)  $\Rightarrow$  (i):

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Setze

$$\mathcal{N} := \left\{ Y \subset X \mid Y \subset \bigcup_{j \in J} U_j \Rightarrow |J| = \infty \right\}$$

und zeige:  $X \notin \mathcal{N}$ . Ist nun  $Y \in \mathcal{N}$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jeder Überdeckung  $X = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$  wie in (iii) durch  $\varepsilon$ -Bälle um  $x_1^\varepsilon, \dots, x_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$  ein  $i_\varepsilon \in \{1, \dots, N(\varepsilon)\}$  mit  $Y \cap B_\varepsilon(x_{i_\varepsilon}^\varepsilon) \in \mathcal{N}$ .

Nehmen wir also an,  $X \in \mathcal{N}$ . Dann wähle für  $\varepsilon = \frac{1}{k}$  induktiv Punkte  $x_k$  so, dass  $Y_k := B_{\frac{1}{2}}(x_1) \cap B_{\frac{1}{2}}(x_2) \cap \dots \cap B_{\frac{1}{k}}(x_k) \in \mathcal{N}$ . Wähle ferner beliebige Punkte  $y_k \in Y_k$ . Für  $k \leq \ell$  sind dann  $y_k$  und  $y_\ell$  in  $Y_k \subset B_{\frac{1}{k}}(x_k)$ , also  $d(y_k, y_\ell) < \frac{2}{k}$ . Damit ist  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, und nach (iii) gibt es ein  $y \in X$  mit  $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$ . Wähle  $i_0$  mit  $y \in U_{i_0}$ . Für hinreichend große  $k$  gilt dann wegen  $\frac{2}{k} + d(y, y_k) \rightarrow 0$ :

$$Y_k \subset B_{\frac{1}{k}}(x_k) \subset B_{\frac{2}{k}}(y_k) \subset B_{\frac{2}{k} + d(y, y_k)}(y) \subset U_{i_0}.$$

Somit ist  $Y_k \notin \mathcal{N}$  für hinreichend großes  $k$ . Dies ergibt einen Widerspruch.  $\square$

**Definition 1.18.** Ein metrischer Raum heißt *kompakt*, falls er eine (und damit alle) der Eigenschaften (i), (ii), (iii) aus Proposition 1.17 hat. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *kompakt*, falls  $(A, d|_{A \times A})$  kompakt ist.

### Bemerkungen 1.19.

- (a) Kompakte metrische Räume sind beschränkt: In Überdeckungen durch konzentrische Bälle  $(B_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$  genügen bereits endlich viele.
- (b) Kompakte Teilmengen sind abgeschlossen: Die Grenzwerte ihrer Folgen gehören nach (ii) zu den Teilmengen.
- (c) Ist  $(X, d)$  vollständig, so gilt:

$$A \subset X \text{ präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \subset X \text{ kompakt}.$$

- (d) Ist  $(X, d)$  kompakt und  $A \subset X$  abgeschlossen, so ist  $A$  kompakt.

(e) Satz von *Heine–Borel*: in  $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$  gilt:

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ abgeschlossen und beschränkt.}$$

In unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen gilt die Implikation  $\Leftarrow$  i. Allg. nicht.

(f) Satz von *Hopf–Rinow*: Ist  $(M, d)$  eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, so gilt ebenfalls

$$A \subset M \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ abgeschlossen und beschränkt,}$$

denn jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge liegt in einem – kompakten! – geodätischen Ball.

Ist  $M$  ein kompakter metrischer Raum, so ist  $\mathcal{C}^0(M)$  mit der Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} = \|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in M} |u(x)| = \max_{x \in M} |u(x)|$$

ein Banachraum.

**Satz 1.20 (Arzela–Ascoli).** Eine Teilmenge  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(M)$  ist kompakt  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  ist abgeschlossen, beschränkt und **gleichgradig stetig**, d. h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  mit:

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y : d(x, y) < \delta, \quad \forall u \in \mathcal{A}.$$

Eine kleine Anmerkung zum Sprachgebrauch: Genau genommen handelt es sich beim oben definierten Begriff um *gleichmäßige* gleichgradige Stetigkeit. Gleichgradige Stetigkeit im üblichen Sinn ist die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in M \exists \delta > 0 \forall u \in \mathcal{A} \forall y \in M : (d(x, y) < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon).$$

Die Definitionen unterscheiden sich darin, dass in der unten stehenden  $\delta$  von  $x$  abhängen darf. Gleichgradige Stetigkeit im üblichen Sinn und gleichmäßige gleichgradige Stetigkeit sind auf kompaktem Räumen  $M$  äquivalent. Deswegen nutzen wir im folgenden den kürzeren Begriff „gleichgradige Stetigkeit“ im Sinne von „gleichmäßiger gleichgradiger Stetigkeit“.

*Beweis.*

$\Rightarrow$ : Es ist klar, dass  $\mathcal{A}$  abgeschlossen und beschränkt sein muss. Zu  $\varepsilon > 0$  wähle eine Überdeckung  $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(u_i^\varepsilon)$ . Wähle  $\delta > 0$  so, dass für die endlich vielen stetigen (und damit gleichmäßig stetigen<sup>5</sup>) Funktionen  $u_1^\varepsilon, \dots, u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$  gilt:  $|u_i^\varepsilon(x) - u_i^\varepsilon(y)| < \varepsilon$

---

<sup>5</sup> $M$  ist kompakt!

wann immer  $d(x, y) < \delta$ . Zu  $u \in \mathcal{A}$  wähle  $i_\varepsilon$  so dass  $\|u - u_{i_\varepsilon}^\varepsilon\| < \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $x, y \in M$  mit  $d(x, y) < \delta$ :

$$|u(x) - u(y)| \leq \underbrace{|u(x) - u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(x) - u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(y)|}_{< \varepsilon \text{ für } d(x, y) < \delta} + \underbrace{|u_{i_\varepsilon}^\varepsilon(y) - u(y)|}_{< \varepsilon} < 3\varepsilon.$$

Somit ist  $\mathcal{A}$  gleichgradig stetig.

$\Leftarrow$ : Da  $\mathcal{A}$  beschränkt ist, existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass  $\|u\|_{C^0} \leq C$  für alle  $u \in \mathcal{A}$ . Sei  $\eta > 0$ . Wähle  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , so dass  $[-C, C] \subset \bigcup_{i=1}^k (t_i - \eta, t_i + \eta)$ . Wähle ferner Punkte  $x_j \in M$ ,  $j = 1, \dots, m$ , so dass  $M = \bigcup_{j=1}^m B_\eta(x_j)$ . Für jede Abbildung  $\pi : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  setze

$$\mathcal{A}_\pi := \{u \in \mathcal{A} \mid |u(x_j) - t_{\pi(j)}| \leq \eta \quad \forall j = 1, \dots, m\}.$$

Dann gilt:  $\mathcal{A} = \bigcup_\pi \mathcal{A}_\pi$ . Wähle nun beliebige  $u_\pi \in \mathcal{A}_\pi$ , falls  $\mathcal{A}_\pi \neq \emptyset$ . Zu  $u \in \mathcal{A}$  wähle ein  $\pi$  mit  $u \in \mathcal{A}_\pi$ . Zu  $x \in M$  wähle  $j$  so, dass  $x \in B_\eta(x_j)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\pi(x)| &\leq |u(x) - u(x_j)| + \underbrace{|u(x_j) - t_{\pi(j)}|}_{\leq \eta, \text{ da } u \in \mathcal{A}_\pi} + \underbrace{|t_{\pi(j)} - u_\pi(x_j)|}_{\leq \eta, \text{ da } u_\pi \in \mathcal{A}_\pi} + |u_\pi(x_j) - u_\pi(x)| \\ &\leq 2\eta + 2 \sup_{d(y, z) < \eta} \left( \sup_{v \in \mathcal{A}} |v(y) - v(z)| \right) \\ &=: \varepsilon(\eta). \end{aligned}$$

Damit ist  $\|u - u_\pi\|_{C^0} \leq \varepsilon(\eta)$ , also  $\mathcal{A} \subset \bigcup_\pi B_{\varepsilon(\eta)}(u_\pi)$ . Für  $\eta \rightarrow 0$  gilt  $\varepsilon(\eta) \rightarrow 0$  wegen gleichgradiger Stetigkeit. Damit ist also  $\mathcal{A}$  präkompakt.  $\mathcal{A}$  ist vollständig als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes.  $\square$

**Proposition 1.21.** Sei  $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$  ein flacher Torus, und  $p \in [1, \infty)$ . Sei  $\mathcal{A} \subset L^p(T^n)$  beschränkt. Dann ist  $\overline{\mathcal{A}} \subset L^p(T^n)$  kompakt, falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  mit

$$\int_{T^n} |u(x+h) - u(x)|^p dx < \varepsilon \quad \forall u \in \mathcal{A}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad |h| < \delta. \quad (1.12)$$

Hierbei operiert  $\mathbb{R}^n$  durch Addition auf  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ , wodurch  $x+h \in \mathbb{R}^n/\Gamma$  definiert wird.

**Bemerkung 1.22.** Gilt die Abschätzung (1.12) für alle  $u \in \mathcal{A}$ , so auch (mit einem geeigneten  $\delta' > 0$  an Stelle von  $\delta$ ) für alle  $u \in \overline{\mathcal{A}}$ : Zu  $u \in \overline{\mathcal{A}}$  wähle  $u' \in \mathcal{A}$  mit  $\|u - u'\|_{L^p} < \varepsilon$ . Dann gilt:

$$\left\| u(\cdot + h) - u \right\|_{L^p}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \underbrace{\|u(\cdot + h) - u'(\cdot + h)\|_{L^p}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|u'(\cdot + h) - u'\|_{L^p}}_{< \varepsilon^{1/p}} + \underbrace{\|u' - u\|_{L^p}}_{< \varepsilon} \\
&= 2\varepsilon + \varepsilon^{1/p} \rightarrow 0 \text{ for } \delta \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

*Beweis.*

Wegen obiger Bemerkung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\mathcal{A}$  abgeschlossen ist in  $L^p(T^n)$ ,  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ .

(a) Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta > 0$  wie in (1.12). Zu  $u \in \mathcal{A}$  setze

$$u_\delta(x) := \delta^{-n} \int_{T^n} \psi\left(\frac{d(x, y)^2}{\delta^2}\right) u(y) \, dy$$

mit  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  wie in der Beweisskizze zu Lemma 1.1, also  $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$ ,  $\psi > 0$  auf  $(-1, 1)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|^2) \, dx = 1$ . Dann ist  $u_\delta \in \mathcal{C}^\infty(T^n) \subset \mathcal{C}^0(T^n)$ .

(b) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
|u_\delta(x) - u(x)| &= \left| \delta^{-n} \int_{T^n} \psi\left(\frac{d(x, y)^2}{\delta^2}\right) (u(y) - u(x)) \, dy \right| \\
&\leq \delta^{-n} \int_{T^n} \psi\left(\frac{d(x, y)^2}{\delta^2}\right) |u(y) - u(x)| \, dy \\
&= \int_{\{|h| < \delta\}} \delta^{-n} \psi\left(\frac{|h|^2}{\delta^2}\right) |u(x+h) - u(x)| \, dh.
\end{aligned}$$

Im Fall  $p > 1$  bestimme  $p^*$  so, dass  $\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p}$ , also  $(1 - \frac{1}{p})p^* = 1$ . Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\|u_\delta - u\|_{L^p}^p &= \int_{T^n} |u_\delta(x) - u(x)|^p \, dx \\
&\leq \int_{T^n} \left| \int_{\{|h| < \delta\}} \delta^{-n} \psi\left(\frac{|h|^2}{\delta^2}\right) |u(x+h) - u(x)| \, dh \right|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Wende die Hölder-Ungleichung  $\left| \int_{\{|h| < \delta\}} f(h) f^*(h) \, dh \right| \leq \|f\|_{L^p} \|f^*\|_{L^{p^*}}$  für  $p$  und  $p^*$  wie oben und für

$$\begin{aligned}
f(h) &:= \delta^{-n} \psi(|h|^2/\delta^2)^{1-\frac{1}{p}} \\
f^*(h) &:= \delta^{-n} \psi(|h|^2/\delta^2)^{\frac{1}{p}} |u(x+h) - u(x)|
\end{aligned}$$

an und erhalte

$$\begin{aligned} \|u_\delta - u\|_{L^p}^p &\leq \int_{T^n} \left| \left( \int_{\{|h|<\delta\}} \left( \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) \right)^{(1-\frac{1}{p})p^*} dh \right)^{\frac{1}{p^*}} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)|^p dh \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p dx, \end{aligned}$$

Es gilt  $\int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) dh = 1$  und somit

$$\begin{aligned} &= \int_{T^n} \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)|^p dh dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\{|h|<\delta\}} \int_{T^n} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)|^p dx dh \\ &= \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) \underbrace{\int_{T^n} |u(x+h) - u(x)|^p dx}_{\leq \sup_{|h|<\delta} \|u(\bullet+h) - u\|_{L^p}^p} dh \\ &\leq \sup_{|h|<\delta} \|u(\bullet+h) - u\|_{L^p}^p \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist  $\|u_\delta - u\|_{L^p} \leq \varepsilon^{1/p}$  für  $p > 1$ . Insbesondere ist  $u_\delta \rightarrow u$  in  $L^p(M)$  für  $\delta \rightarrow 0$  gezeigt, und diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig in  $u \in \mathcal{A}$ .

(c) Mit ganz ähnlichen Abschätzungen erhält man dieselbe Aussage für  $p = 1$ :

$$\begin{aligned} \|u_\delta - u\|_{L^1} &= \int_{T^n} |u_\delta(x) - u(x)| dx \\ &\leq \int_{T^n} \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |(u(x+h) - u(x))| dh dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\{|h|<\delta\}} \int_{T^n} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) |u(x+h) - u(x)| dx dh \\ &= \int_{\{|h|<\delta\}} \delta^{-n} \psi \left( \frac{|h|^2}{\delta^2} \right) \underbrace{\int_{T^n} |u(x+h) - u(x)| dx}_{\leq \sup_{|h|<\delta} \|u(\bullet+h) - u\|_{L^1}} dh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{|h| < \delta} \|u(\bullet + h) - u\|_{L^1} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist  $\|u_\delta - u\|_{L^1} \leq \varepsilon$ . Wiederum haben wir  $u_\delta \rightarrow u$  in  $L^1(M)$  für  $\delta \rightarrow 0$  gezeigt, und diese Konvergenz ist ebenfalls gleichmäßig in  $u \in \mathcal{A}$ .

(d) Zu fixiertem  $\delta > 0$  setze  $\mathcal{A}_\delta := \{u_\delta \mid u \in \mathcal{A}\}$ . Wir definieren

$$\psi_{\delta,x}(y) := \delta^{-n} \psi\left(\frac{d(x,y)^2}{\delta^2}\right).$$

$\mathcal{A}_\delta$  ist beschränkt in  $\mathcal{C}^0(T^n)$ , denn

$$\begin{aligned}
|u_\delta(x)| &= \left| \int_{T^n} \psi_{\delta,x}(y) u(y) \, dy \right| \\
&\leq \|\psi_{\delta,x} \cdot u\|_{L^1} \\
&\leq \|\psi_{\delta,x}\|_{L^{p^*}} \cdot \|u\|_{L^p} \\
&= \left[ \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \psi\left(\frac{\|y\|^2}{\delta^2}\right) \right)^{p^*} dy \right]^{1/p^*} \cdot \|u\|_{L^p} \\
&\leq C(\delta).
\end{aligned}$$

(e)  $\mathcal{A}_\delta$  ist gleichgradig stetig: Für  $\delta$  klein genug und  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ , die  $x, y \in T^n$  repräsentieren und  $|\hat{x} - \hat{y}| \leq \delta$  erfüllen, haben wir  $d(x, y)^2 = |\hat{x} - \hat{y}|^2$  und deswegen  $\psi_{\delta,x}(y) = \psi_{\delta,[0]}(x - y)$ , wobei  $[0] \in T^n$  die Äquivalenzklasse von  $0 \in \mathbb{R}^n$  bezeichne. Also gilt wegen  $u_\delta(x) = \int_{T^n} \psi_{\delta,[0]}(x - y) u(y) \, dy$

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\delta(x)| &\leq \int_{T^n} |\nabla \psi_{\delta,[0]}(x - y)| \cdot |u(y)| \, dy \\
&\leq C'(\delta),
\end{aligned}$$

und diese Schranke ist unabhängig von  $x \in T^n$  und  $u \in \mathcal{A}$ . Daher

$$\begin{aligned}
|u_\delta(x) - u_\delta(x')| &= \left| \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dt} u_\delta(tx + (1-t)x')}_{(\nabla u_\delta)(tx + (1-t)x') \cdot (x - x')} dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |(\nabla u_\delta)(tx + (1-t)x')| \cdot |x - x'| \, dt \\
&\leq C'(\delta) \cdot |x - x'|.
\end{aligned}$$

- (f) Sei  $\overline{\mathcal{A}}_\delta$  der Abschluss von  $\mathcal{A}_\delta$  in  $C^0(T^n)$ . Dieser ist auch gleichgradig stetig, denn für  $\mathcal{A}_\delta \ni u_i \rightarrow u \in \overline{\mathcal{A}}_\delta$  gilt

$$|u(x) - u(y)| = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} (u_i(x) - u_i(y)) \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} |u_i(x) - u_i(y)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

für  $x, y$  und  $\varepsilon$  wir in der Definition von gleichgradiger Stetigkeit. Da  $\overline{\mathcal{A}}_\delta$  auch beschränkt ist, folgt nach dem Satz von Arzela-Ascoli, dass  $\overline{\mathcal{A}}_\delta \in C^0(T^n)$  kompakt ist.

- (g) Sei  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{A}$ . Zeige also:  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  besitzt eine in  $L^p(T^n)$  konvergente Teilfolge. Zu  $\varepsilon_k := \frac{1}{k^p}$  wähle  $\delta_k > 0$  gemäß (b), und dann gilt:  $\|u - u_{\delta_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{k}$ . Für jedes solche  $\delta_k$  ist  $\mathcal{A}_{\delta_k}$  kompakt, daher existiert zu  $((u_i)_{\delta_k})_{i \in \mathbb{N}}$  eine in  $C^0(T^n)$  konvergente Teilfolge. Ihren Grenzwert bezeichnen wir mit  $u_\infty^{(k)}$ . Für Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens – also auch für kompakte Mannigfaltigkeiten und insbesondere für  $T^n$  – gilt die Abschätzung  $\|v\|_{L^p(M)} \leq \text{vol}(M)^{1/p} \cdot \|v\|_{C^0(M)}$ . Somit folgt aus der Konvergenz in  $C^0(T^n)$  auch die Konvergenz in  $L^p(T^n)$ .

Diese konvergenten Folgen können wir auch als Regularisierungen sukzessive gewählter Teilfolgen von  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  wählen: zu einem  $k$  sei  $(u_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  so dass  $((u_i^{(k)})_{\delta_k})_{i \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Zu  $k+1$  wählen wir  $\delta_{k+1}$  wie oben und eine Teilfolge  $(u_i^{(k+1)})_{i \in \mathbb{N}}$  von  $(u_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}}$ , so dass  $((u_i^{(k+1)})_{\delta_{k+1}})_{i \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Schreiben wir diese sukzessive Auswahl von Teilfolgen als Folge (indiziert durch  $k$ ) von Teilfolgen von  $u_i$ , so ist die Diagonalfolge  $u_k^{(k)}$  eine weitere Teilfolge von  $u_i$ , die insbesondere die Konvergenzbedingungen für die  $\delta_k$ -Regularisierung für alle  $k$  erfüllt.

$$\begin{array}{llll} u_1, & u_2, & u_3, & \dots \\ \textcolor{red}{u}_1^{(1)}, & u_2^{(1)}, & u_3^{(1)}, & \dots & \text{mit } (u_i^{(1)})_{\delta_1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u_\infty^{(1)} \\ u_1^{(2)}, & \textcolor{red}{u}_2^{(2)}, & u_3^{(2)}, & \dots & \text{mit } (u_i^{(2)})_{\delta_2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u_\infty^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & \\ u_1^{(k)}, & \dots, & \textcolor{red}{u}_k^{(k)}, & \dots & \text{mit } (u_i^{(k)})_{\delta_k} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u_\infty^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Zeige nun: Die Folge der Grenzwerte  $(u_\infty^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchyfolge in  $L^p$ . Fixiere dazu  $k$ , wähle  $\ell \geq k$ ; dann gilt für hinreichend großes  $j \geq \ell$ :

$$\begin{aligned} \|u_\infty^{(k)} - u_\infty^{(\ell)}\|_{L^p} &\leq \underbrace{\|u_\infty^{(k)} - (u_j^{(j)})_{\delta_k}\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{\|(u_j^{(j)})_{\delta_k} - u_j^{(j)}\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} \\ &\quad + \underbrace{\|u_j^{(j)} - (u_j^{(j)})_{\delta_\ell}\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{\|(u_j^{(j)})_{\delta_\ell} - u_\infty^{(\ell)}\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} \\ &< \frac{4}{k}. \end{aligned}$$

Da  $L^p(T^n)$  vollständig ist, gibt es also ein  $u_\infty$  mit  $u_\infty^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_\infty$  in  $L^p(T^n)$ . Zeige nun, dass für die oben konstruierte Folge  $(u_j^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  gilt:  $u_j^{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_\infty$  in  $L^p(T^n)$ . Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle  $k$  so groß, dass  $\|u_\infty - u_\infty^{(k)}\|_{L^p} < \varepsilon$  und  $\frac{1}{k} < \varepsilon$ . Dann gilt für hinreichend großes  $j$ :

$$\begin{aligned} \|u_\infty - u_j^{(j)}\|_{L^p} &\leq \underbrace{\|u_\infty - u_\infty^{(k)}\|_{L^p}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|u_\infty^{(k)} - (u_j^{(j)})_{\delta_k}\|_{L^p}}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|(u_j^{(j)})_{\delta_k} - u_j^{(j)}\|_{L^p}}_{< \frac{1}{k}} \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Definition 1.23.** Seien  $X, Y$  metrische Räume. Dann heißt eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  *kompakt*, falls für jedes beschränkte  $A \subset X$  die Bildmenge  $f(A) \subset Y$  präkompakt ist.

**Übung 1.5.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $Y$  vollständig. Dann ist  $f : X \rightarrow Y$  kompakt  $\Leftrightarrow$  für jede beschränkte Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $X$  hat die Bildfolge  $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.

**Bemerkungen 1.24.**

- (a) Seien  $X, Y$  Banachräume und  $f : X \rightarrow Y$  eine injektive kompakte lineare Abbildung. Für  $\varphi_i, \varphi \in X$ ,  $i \in \mathbb{N}$  *konvergiere  $\varphi_i$  schwach gegen  $\varphi$* , in Symbolen  $\varphi_i \rightharpoonup \varphi$ , d. h. es gelte für alle stetigen linearen Funktionale  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  die Konvergenz  $\alpha(\varphi_i) \rightarrow \alpha(\varphi)$  für  $i \rightarrow \infty$ . Dann konvergiert  $f(\varphi_i)$  im üblichen (= starken) Sinn gegen  $f(\varphi)$ . Denn zunächst sind schwach konvergente Folgen beschränkt, siehe [62, Korollar IV.2.3]. Angenommen,  $f(\varphi_i)$  konvergiert nicht gegen  $f(\varphi)$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge, die wir wieder mit den Indizes  $i \in \mathbb{N}$  bezeichnen, gilt  $\|f(\varphi_i) - f(\varphi)\|_Y \geq \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Aus obiger Übung folgt, dass  $f(\varphi_i)$  eine konvergente Teilfolge (mit wieder in der Notation unterdrücktem Subindex) besitzt, und sei  $\psi \in Y$  deren Grenzwert. Wähle nun ein stetiges lineare Abbildung  $\beta : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\beta(\psi) \neq \beta(f(\varphi))$ . Da  $\beta \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, gilt dann

$$\beta(f(\varphi)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \beta(f(\varphi_i)) = \beta(\psi),$$

was einen Widerspruch darstellt. Somit ist die Konvergenz gezeigt.

- (b) Seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  stetige lineare Abbildungen. Dann gilt:
- (i)  $A \subset X$  beschränkt  $\Rightarrow f(A) \subset Y$  beschränkt.
  - (ii)  $A \subset X$  präkompakt  $\Rightarrow f(A) \subset Y$  präkompakt.
  - (iii) Ist  $f$  oder  $g$  kompakt, so auch  $g \circ f$ .



(iv) Falls  $\dim(Y) < \infty$ , so ist nach *Heine–Borel*  $f$  kompakt.

**Proposition 1.25.** *Sei  $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$  ein flacher Torus. Für jedes  $q \in [1, \infty)$  und jedes  $p \geq 1$  mit  $1 - \frac{n}{q} > -\frac{n}{p}$  ist die Einbettung  $H^{1,q}(T^n) \subset L^p(T^n)$  kompakt.*

*Beweis.*

- (a) Wir betrachten zunächst den Fall  $q \in [1, n)$ , d. h.  $1 - \frac{n}{q} < 0$ . Wähle  $p_1 \geq 1$  mit  $-\frac{n}{p_1} = 1 - \frac{n}{q}$ . Nach Satz 1.8 und Bemerkung 1.13 haben wir für  $1 \leq p \leq p_1$  eine stetige Einbettung  $H^{1,q}(T^n) \subset L^p(T^n)$ . Zu zeigen ist also: für  $1 \leq p < p_1$  ist die Einbettung kompakt. Sei also  $\mathcal{A} \subset H^{1,q}(T^n)$  beschränkt. Dann ist auch  $\mathcal{A}$  auch in  $L^p(T^n)$  beschränkt. Es gibt also ein  $C_1 > 0$  so dass  $\|u\|_{L^p(T^n)} \leq C_1$  und  $\|u\|_{H^{1,q}(T^n)} \leq C_1$  für alle  $u \in \mathcal{A}$ .
- (b) Wir überprüfen das Kompaktheitskriterium (1.12) aus Proposition 1.21 zunächst im Fall  $p = 1$  und  $q \in [1, n)$ . Für alle  $u \in \mathcal{C}^\infty(T^n)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{T^n} |u(x+h) - u(x)| \, dx &= \int_{T^n} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+th) \, dt \right| \, dx \\
 &\leq \int_{T^n} \int_0^1 |\nabla u|_{x+th} \cdot h \, dt \, dx \\
 &\leq |h| \int_{T^n} \int_0^1 |\nabla u|_{x+th} \, dt \, dx \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} |h| \int_0^1 \int_{T^n} |\nabla u|_{x+th} \, dx \, dt \\
 &= |h| \cdot \|\nabla u\|_{L^1(T^n)} \\
 &\leq |h| \cdot \text{vol}(T^n)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q(T^n)} \\
 &\leq |h| \cdot \text{vol}(T^n)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \|u\|_{H^{1,q}(T^n)}.
 \end{aligned}$$

In der resultierenden Ungleichung

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^1(T^n)} \leq |h| \cdot C_2 \cdot \|u\|_{H^{1,q}(T^n)} \quad (1.13)$$

sind beide Seiten stetig bzgl. der  $H^{1,q}$ -Norm, denn  $H^{1,q}(T^n) \subset L^1(T^n)$ . Da  $\mathcal{C}^\infty(T^n) \subset H^{1,q}(T^n)$  dicht ist, gilt die Abschätzung (1.13) auch für alle  $u \in H^{1,q}(T^n)$ . Für alle  $u \in \mathcal{A}$  gilt folglich  $\|u(\cdot + h) - u\|_{L^1(T^n)} \leq |h| \cdot C_2 \cdot C_1$ . Nach dem Kompaktheitskriterium aus Proposition 1.21 ist daher  $\mathcal{A} \subset L^1(T^n)$  präkompakt.

- (c) Sei nun  $p \in (1, p_1)$ . Setze  $r := p \frac{p_1-1}{p_1-p} > p \geq 1$  und  $r' := p \frac{p_1-1}{p-1} > p \geq 1$ . Dann gilt  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{p}$  und nach der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung (siehe Übung 1.1) somit für alle  $u \in L^p(T^n)$ :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &= \left\| |u|^{\frac{1}{r}} \cdot |u|^{1-\frac{1}{r}} \right\|_{L^p} \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \left\| |u|^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^r} \cdot \left\| |u|^{1-\frac{1}{r}} \right\|_{L^{r'}} \\ &= \|u\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \cdot \left( \int_{T^n} |u|^{(1-\frac{1}{r})r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass  $(1 - \frac{1}{r}) \cdot r' = p_1$  und erhält dann:

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \cdot \|u\|_{L^{p_1}}^{(1-\frac{1}{r})}.$$

Sei nun  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{A}$ . Diese ist beschränkt in  $L^{p_1}(T^n)$ . Auf Grund von (c) Punkt.b konvergiert  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (nach evtl. Übergang zu einer Teilfolge) in  $L^1(T^n)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u_i - u_j\|_{L^p} &\leq \|u_i - u_j\|_{L^1}^{\frac{1}{r}} \cdot \|u_i - u_j\|_{L^{p_1}}^{(1-\frac{1}{r})} \\ &\leq C_3 \|u_i - u_j\|_{L^1}^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Folglich ist  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(T^n)$ , also konvergent. Somit ist nach Übung 1.5 die Einbettung  $H^{1,q}(T^n) \rightarrow L^p(T^n)$  in diesem Fall kompakt.

- (d) Nun betrachten wir den Fall  $q \geq n$ . Hierzu wählen wir ein  $\tilde{q} \in [1, \infty)$  mit  $1/n < 1/\tilde{q} < 1/p + 1/n$ . Insbesondere gilt dann  $q \geq n > \tilde{q}$  und  $1 - \frac{n}{\tilde{q}} > -\frac{n}{p}$ . Somit ist  $H^{1,q}(M) \rightarrow H^{1,\tilde{q}}(M)$  stetig. Mit den Punkten (b) und (c) sehen wir, dass  $H^{1,\tilde{q}}(M) \rightarrow L^p(M)$  kompakt ist, und somit ist dann  $H^{1,q}(M) \rightarrow L^p(M)$  ebenfalls kompakt.  $\square$

Nun übertragen wir die vorige Proposition von  $M = T^n$  auf beliebige kompakte Mannigfaltigkeiten:

**Proposition 1.26.** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ . Dann ist für  $q, p \in [1, \infty)$  mit  $1 - \frac{n}{q} > -\frac{n}{p}$  die Einbettung  $H^{1,q}(M) \subset L^p(M)$  kompakt.*

Die Ungleichung  $1 - \frac{n}{q} > -\frac{n}{p}$  merkt man sich am besten wie folgt: das in Definition 1.10 definierte Gewicht von  $H^{1,q}(M)$  ist größer als das Gewicht von  $L^p(M)$ .

*Beweis.*

- (a) Wir überdecken  $M$  durch Karten  $(U_j, \varphi_j, V_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , die ihrerseits Einschränkungen von Karten  $(U'_j, \varphi'_j, V'_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , sind mit  $U_j \subseteq U'_j$ ,  $V_j \subseteq V'_j$  und  $\varphi_j = \varphi'_j|_{U_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Dann sind die Koordinatengebiete  $V_j \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, und die Funktionen  $g_{kl}^{(j)}$  sowie alle ihre Ableitungen sind beschränkt auf  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Es gibt also ein  $C_1 > 0$  so dass für alle  $u \in L^p(U_j)$  bzw.  $u \in H^{1,q}(M)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , gilt:

$$\frac{1}{C_1} \cdot \|u \circ \varphi_j^{-1}\|_{L^p(V_j)} \leq \|u\|_{L^p(U_j)} \leq C_1 \cdot \|u \circ \varphi_j^{-1}\|_{L^p(V_j)} \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{C_1} \cdot \|u \circ \varphi_j^{-1}\|_{H^{1,q}(V_j)} \leq \|u\|_{H^{1,q}(U_j)} \leq C_1 \cdot \|u \circ \varphi_j^{-1}\|_{H^{1,q}(V_j)}. \quad (1.15)$$

Sei  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,N}$  eine der Überdeckung  $(U_j)_{j=1,\dots,N}$  zugeordnete Teilung der Eins auf  $M$ , d. h.  $\alpha_j \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp}(\alpha_j) \subset U_j$ ,  $0 \leq \alpha_j \leq 1$  und  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ . Wähle ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  so groß, dass  $\bigcup_{j=1}^N V_j \subset \mathcal{F}$  für einen Fundamentalbereich  $\mathcal{F}$ .

- (b) Sei nun  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $H^{1,q}(M)$ . Dann ist gibt es ein  $C_2 > 0$  mit  $\|u_i\|_{H^{1,q}(M)} \leq C_2$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , also auch ein  $C_3 > 0$  mit  $\|\alpha_j \cdot u_i\|_{H^{1,q}(M)} \leq C_3$ ,  $i \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, N$ . Mit der Abschätzung (1.15) gilt dann (nach Fortsetzung von  $(\alpha_j u_i) \circ \varphi_j^{-1}$  durch 0 auf  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ):

$$\|(\alpha_j u_i) \circ \varphi_j^{-1}\|_{H^{1,q}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} = \|(\alpha_j u_i) \circ \varphi_j^{-1}\|_{H^{1,q}(V_j)} \leq C_1 \|\alpha_j u_i\|_{H^{1,q}(U_j)} \leq C_1 \cdot C_3.$$

Proposition 1.25 liefert nach  $N$ -maligem Übergang zu einer Teilfolge:  $(\alpha_j u_i) \circ \varphi_j^{-1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} v_j$ , in  $L^p(\mathbb{R}^n/\Gamma)$  für alle  $j = 1, \dots, N$ . Mit  $\text{supp}((\alpha_j u_i) \circ \varphi_j^{-1}) \subset V_j$  ist auch  $\text{supp}(v_j) \subset V_j$ . Setze  $v_j \circ \varphi_j$  durch 0 auf ganz  $M$  fort und setze dann  $v := \sum_{j=1}^N v_j \circ \varphi_j \in L^p(M)$ . Dann gilt offenbar  $(\alpha_j u_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} v_j \circ \varphi_j$  in  $L^p(U_j)$  und folglich  $u_i = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N v_j \circ \varphi_j = v$  in  $L^p(M)$ .  $\square$

Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise  $A \Subset X$ , dafür dass  $A$  eine offene Teilmenge des topologischen Raums  $X$  ist. Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so bezeichnen wir das Bündel der  $(r, s)$ -Tensoren mit  $T^{(r,s)}M$ , siehe Anhang A.1.3 Definition A.8. Den Vektorraum der auf  $U \Subset M$  definierten glatten Schnitte von  $T^{(r,s)}M$  bezeichnen wir mit  $\Gamma(U; T^{(r,s)}M)$ , und wir setzen  $\Gamma(T^{(r,s)}M) := \Gamma(M; T^{(r,s)}M)$ .

**Definition 1.27.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in [1, \infty]$ ,  $U \Subset M$ . Für einen (glatten) Tensor  $u \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$  definieren wir für  $p \in [1, \infty)$

$$\|u\|_{L^p(U)} := \left( \int_U |u|^p \, d\text{vol} \right)^{1/p}$$

$$\|u\|_{H^{k,p}(U)} := \left( \sum_{i=0}^k \|\nabla^i u\|_{L^p(U)}^p \right)^{1/p}$$

$$\|u\|_{L^\infty(U)} := \operatorname{ess-sup}_U |u|$$

$$\|u\|_{H^{k,\infty}(U)} := \max \{ \|\nabla^j u\|_{L^p(U)} \mid j = 0, 1, \dots, k \}$$

Falls  $U = M$  oder falls  $U$  aus dem Kontext heraus klar ist, lassen wir  $(U)$  im Index der Norm zumeist weg, schreiben also  $\|u\|_{L^p}$ ,  $\|u\|_{H^{k,p}}$  etc. Sei  $H^{k,p}(U; T^{(r,s)}M)$  die Vervollständigung von

$$\left\{ u \in \Gamma(U; T^{(r,s)}M) \mid \|u\|_{H^{k,p}} < \infty \right\}$$

bezüglich der entsprechenden Norm, und  $L^p(U; T^{(r,s)}M) := H^{0,p}(U; T^{(r,s)}M)$ . Elemente von  $L^p(U; T^{(r,s)}M)$  bzw.  $H^{k,p}(U; T^{(r,s)}M)$  nennt man auf  $U$  definierte  $L^p$ - bzw.  $H^{k,p}$ -Schnitte von  $T^{(r,s)}M$ . Im Fall  $U = M$  schreiben wir auch  $L^p(T^{(r,s)}M) := L^p(M; T^{(r,s)}M)$  und  $H^{k,p}(T^{(r,s)}M) := H^{k,p}(M; T^{(r,s)}M)$ .

Offensichtlich gilt für  $p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{k+\ell+1,p}}^p &= \|u\|_{H^{k,p}}^p + \|\nabla^{k+1} u\|_{H^{\ell,p}}^p \\ \|u\|_{H^{k+\ell+1,\infty}} &= \max \left\{ \|u\|_{H^{k,p}}, \|\nabla^{k+1} u\|_{H^{\ell,p}} \right\}. \end{aligned}$$

Die Räume  $L^p(U; T^{(r,s)}M)$  bzw.  $H^{k,p}(U; T^{(r,s)}M)$  kann man wiederum als Unterräume von  $L_{\text{loc}}^1(U; T^{(r,s)}M)$  realisieren (zum Beispiel durch eine distributionelle Definition). Auch für Tensoren erhält man die Abschätzungen (1.14) und (1.15).

**Proposition 1.28.** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ ,  $r, s \in \mathbb{N}_0$ . Seien  $q, p \in [1, \infty)$  gegeben mit  $1 - \frac{n}{q} > -\frac{n}{p}$ . Sei  $(u_i)$  eine beschränkte Folge von  $H^{1,q}$ -Schnitten von  $T^{(r,s)}M$ . Dann besitzt  $(u_i)$  eine Teilfolge, die in  $L^p(M)$  konvergiert. In anderen Worten: die Einbettung  $H^{1,q}(T^{(r,s)}M) \subset L^p(T^{(r,s)}M)$  ist kompakt.*

*Beweis.*

Im Fall  $M = T^n$  mit der flachen Metrik schreiben wir  $u_i$  komponentenweise als  $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})^T$ . Wir erhalten die Aussage, indem wir Proposition (1.25) komponentenweise anwenden.

Den allgemeinen Fall beweist man nun analog zum Beweis von Proposition 1.26.  $\square$

**Satz 1.29 (Rellich–Kondrakhov, 1. Teil).** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ . Dann ist für jedes  $p, q \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $k + \ell - \frac{n}{q} > k - \frac{n}{p}$  die Einbettung  $H^{k+\ell,q}(M) \subset H^{k,p}(M)$  kompakt.*

Die Aussage verallgemeinert sich auf  $(r, s)$ -Tensoren,  $r, s \in \mathbb{N}_0$ : Die Einbettung  $H^{k+\ell, q}(T^{(r, s)}M) \subset H^{k, p}(T^{(r, s)}M)$  ist kompakt.

Die Ungleichung  $k + \ell - \frac{n}{q} > k - \frac{n}{p}$  merkt man sich am besten wie folgt: das in Definition 1.10 definierte Gewicht von  $H^{k+\ell, q}(M)$  ist größer als das Gewicht von  $H^{k, p}$ .

*Beweis.*

Die Proposition 1.26 liefert bereits den Spezialfall  $k = 0, \ell = 1$ .

(a) Betrachte zunächst den Fall  $k \in \mathbb{N}_0$  beliebig,  $\ell = 1$ . Sei  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $H^{k+1, q}(M)$ . Für jedes  $j = 0, 1, \dots, k$  ist dann  $(\nabla^j u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $H^{1, q}(T^{(0, j)}M)$ . Nach Übergang zu Teilfolgen ist also  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(M) = L^p(T^{(0, 0)}M)$ ,  $(\nabla u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(T^{(0, 1)}M)$  und allgemein  $(\nabla^j u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(T^{(0, j)}M)$  für alle  $j = 0, \dots, k$ . Daher ist  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $H^{k, p}(M)$ , folglich konvergent in  $H^{k, p}(M)$ .

(b) Seien nun  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  beliebig. Wähle zunächst ein  $\tilde{q} \in [1, q]$ , so dass gilt:

$$0 > \ell - \frac{n}{\tilde{q}} > -\frac{n}{p}.$$

Bestimme geeignete  $p_1, \dots, p_\ell \in [1, \infty)$  mit

$$k + \ell - \frac{n}{\tilde{q}} = k + \ell - 1 - \frac{n}{p_1} = k + \ell - 2 - \frac{n}{p_2} = \dots = k + 0 - \frac{n}{p_\ell},$$

insbesondere  $p_\ell > p$ . Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} H^{k+\ell, q}(M) & \overset{\text{stetig}}{\subset} & H^{k+\ell, \tilde{q}}(M) \\ & \overset{\text{stetig}}{\subset} & H^{k+\ell-1, p_1}(M) \\ & \overset{\text{stetig}}{\subset} & H^{k+\ell-2, p_2}(M) \\ & \vdots & \\ & \overset{\text{stetig}}{\subset} & H^{k+1, p_{\ell-1}}(M) \\ & \overset{\text{kompakt}}{\subset} & H^{k, p}(M) \end{array} \quad \text{da} \quad k + 1 - \frac{n}{p_{\ell-1}} = k - \frac{n}{p_\ell} > k - \frac{n}{p}.$$

Nach Bemerkung 1.24 ist die Verkettung stetiger Abbildungen mit einer kompakten wiederum kompakt.

Der Beweis der tensoriellen Aussage ist völlig analog. □

**Bemerkung 1.30.** Der Satz von Rellich-Kondrakhov gilt nicht für  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ . Als Gegenbeispiel wählen wir etwa  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp}(u) \subset B_1(0)$  und  $u \not\equiv 0$ . Setze dann  $u_j(x^1, \dots, x^n) := u(x^1 - 2j, x^2, \dots, x^n)$ . Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes in  $\mathbb{R}^n$  ist  $\|u_j\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Daher ist die Folge  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $H^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $k, p$ . Da die  $u_i$  disjunkten Träger haben, gilt andererseits für  $i \neq j$ :

$$\|u_i - u_j\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u_i - u_j|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_i|^q dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u_j|^q dx = 2\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q > 0.$$

Daher ist keine Teilfolge von  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^q(\mathbb{R}^n)$ , folglich auch in keinem der Sobolev-Räume  $H^{\ell,q}(\mathbb{R}^n)$ .

### 1.3. Der Gauß'sche Divergenzsatz

Sei  $\omega$  eine differenzierbare 1-Form. In lokalen Koordinaten schreibt sich  $\omega$  dann als  $\omega(x) = \omega_j(x) dx^j$ .

**Definition 1.31.** Das *Kodifferential* von  $\omega$  ist die Funktion, die in lokalen Koordinaten gegeben ist durch

$$\delta(\omega) := -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right), \quad (1.16)$$

wobei  $\det(g) = \det((g_{ij})_{i,j=1 \dots n})$ .

Man nennt  $\delta(\omega)$  oft auch die *Divergenz* von  $\omega$ , in vielen Literaturquellen wird aber die Divergenz nur von Vektorfeldern  $X \in \Gamma(TM)$  gebildet und häufig mit einer anderen Vorzeichen-Konvention. Die Funktion  $\pm \text{div } X$  in diesen Quellen stimmt dann mit  $\delta(g(X, \bullet))$  im vorliegenden Buch überein.

**Beispiel 1.32.** In kartesischen Koordinaten auf  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  ist

$$\delta(\omega) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}.$$

**Übung 1.6.** Zeigen Sie, dass  $\delta(\omega)$  wohldefiniert ist, also unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

**Bemerkung 1.33.** Ist  $(M, g)$  eine beliebige riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ , und sind  $x^1, \dots, x^n$  riemannsche Normalkoordinaten um  $p$ , so gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + O(|x|^2) \\ \Rightarrow g^{ij}(x) &= \delta^{ij} + O(|x|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{\det(g)} &= 1 + O(|x|^2) \\ \Rightarrow (\delta\omega)(p) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(0). \end{aligned}$$

**Lemma 1.34.** Seien  $g, \bar{g}$  konforme riemannsche Metriken auf der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ , d. h.  $\bar{g} = f^2 \cdot g$  mit  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f > 0$ . Dann gilt für alle differenzierbaren 1-Formen  $\omega$ :

$$\delta_{\bar{g}}\omega = f^{-2} \left( \delta_g\omega - (n-2) \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \omega \right\rangle_g \right).$$

*Beweis.*

Wir berechnen in lokalen Koordinaten:  $\bar{g}_{ij} = f^2 \cdot g_{ij} \Rightarrow \bar{g}^{ij} = f^{-2} \cdot g^{ij}$  und  $\sqrt{\det(\bar{g})} = f^n \cdot \sqrt{\det(g)}$ . Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{g}}\omega &= -\frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\det(\bar{g})} \bar{g}^{ij} \omega_j \right) \\ &= -\frac{1}{f^n \sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( f^n \sqrt{\det(g)} f^{-2} g^{ij} \omega_j \right) \\ &= -\frac{f^{n-2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\det(g)} g^{ij} \omega_j) + \sqrt{\det(g)} g^{ij} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} f^{n-2}}{f^n \sqrt{\det(g)}} \\ &= f^{-2} \delta_g \omega - f^{-n} g^{ij} \omega_j \cdot (n-2) f^{n-3} \frac{\partial}{\partial x^i} f \\ &= f^{-2} (\delta_g \omega - f^{-1} \langle \nabla f, \omega \rangle_g). \end{aligned}$$

□

**Definition 1.35.** Für  $u \in C^2(M)$  setze  $\Delta u := \delta \nabla u$ . Der Operator  $\Delta : C^2(M) \rightarrow C^0(M)$  heißt *Laplace-Operator* oder genauer *Laplace-Beltrami-Operator*.

In lokalen Koordinaten ist der Laplace-Operator gegeben durch:

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^n \partial_i \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \partial_j u \right).$$

Hierbei und im Folgenden setzen wir immer  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Man kann dann weiterrechnen:

$$\Delta u = - \sum_{i=1}^n \left( g^{ij} \partial_i \partial_j u + (\partial_i g^{ij}) \partial_j u + \frac{1}{2} g^{ij} g^{lk} (\partial_i g_{lk}) \partial_j u \right)$$

$$= - \sum_{i=1}^n g^{ij} \left( \partial_i \partial_j u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u \right) \quad (1.17)$$

Hierbei benutzen wir die folgende Formel in lokalen Koordinaten  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$ .

In kartesischen Koordinaten von  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  ist  $\Delta u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2}$ . Wie oben gilt daher auch auf einer beliebigen riemannschen Mannigfaltigkeit in riemannschen Normalkoordinaten um  $p$ :  $(\Delta u)(p) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial (x^i)^2}(0)$ .

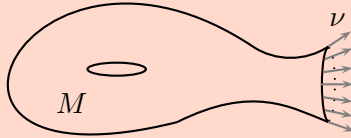
**Lemma 1.36.** *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist  $\bar{g} = f^2 \cdot g$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f > 0$ , so ist für alle  $u \in C^2(M)$ :*

$$\Delta^{\bar{g}} u = f^{-2} \left( \Delta^g u - (n-2) \left\langle \frac{\nabla f}{f}, \nabla u \right\rangle_g \right).$$

*Beweis.*

Folgt direkt aus Lemma 1.34. □

**Satz 1.37 (Gauß'scher Divergenzsatz).** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und  $\nu$  das äußere Einheits-Normalenfeld.*



Dann gilt für alle stetig differenzierbaren 1-Formen  $\omega$  mit kompaktem Träger:

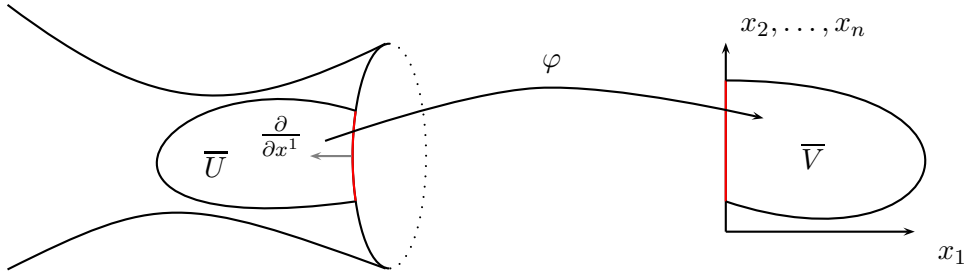
$$\int_M \delta \omega \, \text{dvol} = - \int_{\partial M} \omega(\nu) \, \text{dvol}^{\partial M}.$$

*Beweis.*

Betrachte Karten  $(U, \varphi, V)$  mit  $V = (0, a)^n$ , die Einschränkungen von Karten  $(U', \varphi', V')$  sind, so dass  $[0, a]^n \subset V'$ . Wir schreiben  $\varphi$  in Komponenten  $\varphi' = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  für  $x^i \in C^\infty(U')$ . Im Fall  $\bar{U} \cap \partial M \neq \emptyset$  können wir die Karte  $\varphi$  so wählen, dass  $x^2, \dots, x^n$  sich zu Koordinaten von  $\partial M$  einschränken und so, dass  $\{0\} \times [0, a]^{n-1} = \varphi'(\bar{U} \cap \partial M)$

und  $\frac{\partial}{\partial x^1} \big|_{\varphi(0, x^2, \dots, x^n)} \perp \partial M$ ,  $\left| \frac{\partial}{\partial x^1} \big|_{\varphi(0, x^2, \dots, x^n)} \right| = 1$  gelten.





In diesen Koordinaten hat dann die Metrik längs des Randes  $\partial M$  die Gestalt

$$(g_{ij})_{i,j=1\dots n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & (g_{ij})_{i,j=2\dots n} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist  $(g_{ij})_{i,j=2\dots n}$  die von  $g$  induzierte Metrik des Randes.

Eine endliche Auswahl  $(U_i, \varphi_i, V_i)$ ,  $i = 1 \dots N$  solcher Karten überdeckt bereits  $\text{supp}(\omega)$ . Mittels einer Teilung der Eins zu dieser endlichen Überdeckung von  $\text{supp}(\omega)$  können wir  $\omega$  zerlegen in  $\omega = \sum_{k=1}^N \omega_k$  mit  $\text{supp}(\omega_k) \subset \overline{U}_k$ . Da die Integrale additiv sind, genügt es, die Behauptung für den Fall zu beweisen, dass  $\text{supp}(\omega) \subset U$  für eine solche Karte  $(U, \varphi, (0, a)^n)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \delta \omega \, \text{dvol} &= \int_{[0,a]^n} -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_i \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) \sqrt{\det(g)} \, dx^1 \dots dx^n \\ &= - \int_{[0,a]^n} \partial_i \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) \, dx^1 \dots dx^n \\ &= - \int_{[0,a]^{n-1}} \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) \Big|_{x_i=0}^a \, dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n. \end{aligned}$$

Liegt  $\overline{U}$  im Innern von  $M$ , so verschwindet  $\omega$  an den Randkomponenten  $x_i = 0$  und  $x_i = a$  von  $[0, a]^n$ , und es folgt  $\int_M \delta \omega = 0$ . Im anderen Fall gilt: Liegt  $y \in \partial U$  im Innern von  $M$ , so verschwindet  $\omega$  in  $y$ . Deswegen verschwindet  $\omega$  auf allen Seitenflächen des Randes, mit Ausnahme der Seitenfläche  $\varphi^{-1}(\{0\} \times [0, a]^{n-1}) = \overline{U} \cap \partial M$ .

Im anderen Fall haben wir (mit  $\omega_1 = \omega(\partial_1) = -\omega(\nu)$  längs  $\partial M$ ):

$$\begin{aligned} \int_M \delta \omega \, \text{dvol} &= \int_{[0,a]^{n-1}} \sqrt{\det(g)} \cdot g^{1j} \omega_j \, dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{[0,a]^{n-1}} \omega_1 \sqrt{\det(g^{\partial M})} \, dx^2 \dots dx^n \\ &= - \int_{\partial M} \omega(\nu) \, \text{dvol}^{\partial M}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 1.38.** *Sei  $u \in \mathcal{C}^1(M)$  und  $\omega$  eine stetig differenzierbare 1-Form. Dann gilt:*

$$\delta(u \cdot \omega) = u \cdot \delta\omega - \langle \omega, \nabla u \rangle. \quad (1.18)$$

*Beweis.*

Wir berechnen in lokalen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \delta(u \cdot \omega) &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \partial_i \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \cdot u \omega_j \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det(g)}} u \partial_i \left( \sqrt{\det(g)} \cdot g^{ij} \omega_j \right) - g^{ij} \omega_j \partial_i u \\ &= u \delta(\omega) - \langle \omega, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

□

**Folgerung 1.39 (Green'sche Formeln).** *Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld  $\nu$ . Sei  $u \in \mathcal{C}^1(M)$ ,  $\omega$  eine stetig differenzierbare 1-Form und  $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(\omega)$  kompakt. Dann gilt:*

$$\int_M u \cdot \delta\omega \, \text{dvol} = \int_M \langle \nabla u, \omega \rangle \, \text{dvol} - \int_{\partial M} u \cdot \omega(\nu) \, \text{dvol}^{\partial M}. \quad (1.19)$$

*Sei  $u \in \mathcal{C}^1(M)$ ,  $v \in \mathcal{C}^2(M)$  und  $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$  kompakt. Dann gilt:*

$$\int_M u \Delta v \, \text{dvol} = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, \text{dvol} - \int_{\partial M} u \cdot \nabla_\nu v \, \text{dvol}^{\partial M}. \quad (1.20)$$

*Seien  $u, v \in \mathcal{C}^2(M)$  und  $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$  kompakt. Dann gilt:*

$$\int_M u \Delta v \, \text{dvol} = \int_M v \Delta u \, \text{dvol} + \int_{\partial M} (v \cdot \nabla_\nu u - u \cdot \nabla_\nu v) \, \text{dvol}^{\partial M}. \quad (1.21)$$

*Beweis.*

(1.19) erhält man durch Integration von (1.18) aus dem Divergenzsatz. (1.20) folgt aus (1.19) mit  $\omega = \nabla v$ . (1.21) folgt aus (1.20) durch Antisymmetrisieren in  $u$  und  $v$ . □

**Bemerkung 1.40.** Die Anwendung einer der Formeln (1.19–1.21) bezeichnet man als *partielle Integration*.

**Lemma 1.41.** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit, seien  $u, v \in \mathcal{C}^2(M)$  und  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

Dann gilt:

$$\Delta(u \cdot v) = \Delta u \cdot v - 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + u \cdot \Delta v \quad (1.22)$$

$$\Delta(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot \Delta u - (f'' \circ u) \cdot |\nabla u|^2 \quad (1.23)$$

*Beweis.*

Für (1.22) berechnen wir mit Hilfe von (1.18):

$$\begin{aligned} \Delta(u \cdot v) &= \delta(\nabla(u \cdot v)) \\ &= \delta((\nabla u) \cdot v + u \cdot \nabla v) \\ &= \delta(\nabla u) \cdot v - \langle \nabla u, \nabla v \rangle + u \cdot \delta(\nabla v) - \langle \nabla u, \nabla v \rangle. \end{aligned}$$

Für (1.23) erhalten wir ganz analog, ebenfalls mit (1.18):

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ u) &= \delta(\nabla(f \circ u)) \\ &= \delta((f' \circ u) \cdot \nabla u) \\ &= (f' \circ u) \cdot \delta(\nabla u) - \langle \nabla(f' \circ u), \nabla u \rangle \\ &= (f' \circ u) \cdot \delta(\nabla u) - \langle (f'' \circ u) \cdot \nabla u, \nabla u \rangle. \end{aligned}$$

□

## 1.4. Poincaré-Ungleichung

**Wiederholung:** Sei  $B_{\text{inj}(x)}(x)$  der größte offene Ball um  $x$ , auf dem riemannsche Normalkoordinaten existieren. Den Radius des Balls  $B_{\text{inj}(x)}(x)$  nennt man den *Injektivitätsradius*  $\text{inj}(x)$  in  $x$ . Die Funktion  $\text{inj}: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  ist stetig. Der *Injektivitätsradius der riemannschen Mannigfaltigkeit*  $(M, g)$  ist definiert als

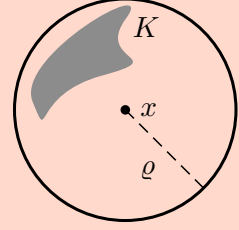
$$\text{inj}(M, g) := \inf_{x \in M} \text{inj}(x).$$

Ist  $M$  geschlossen, dann folgt  $\text{inj}(M, g) > 0$ .

**Proposition 1.42 (Poincaré-Ungleichung).** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , sei  $0 < \varrho_0 < \text{inj}(M, g)$  und sei  $q > n$ . Dann gibt es ein  $C > 0$ , so dass für alle  $0 < \varrho \leq \varrho_0$ , für jedes  $x \in M$  und für jede kompakte Teilmenge  $K \subset B_\varrho(x)$  mit positivem Volumen gilt:

$$\left| u(x) - \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z) \right| \leq \frac{C \cdot \varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \quad (1.24)$$

für alle  $u \in C^1(M)$ .



*Beweis.*

Sei  $c_{x,z} : [0, 1] \rightarrow M$  die eindeutige kürzeste Geodätische von  $x$  nach  $z \in B_{\text{inj}(x)}(x)$ , parametrisiert auf dem Einheitsintervall. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} & \left| u(x) - \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z) \right| \\ &= \frac{1}{\text{vol}(K)} \left| \int_K (u(x) - u(z)) \, d\text{vol}(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K |u(x) - u(z)| \, d\text{vol}(z) \\ &= \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(c_{x,z}(t)) \, dt \right| d\text{vol}(z) \\ &\leq \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \int_0^1 \left| \left\langle \nabla u|_{c_{x,z}(t)}, \dot{c}_{x,z}(t) \right\rangle \right| dt \, d\text{vol}(z) \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K \int_0^1 \left| \nabla u|_{c_{x,z}(t)} \right| \cdot \underbrace{|\dot{c}_{x,z}(t)|}_{=d(x,z) \leq \varrho} dt \, d\text{vol}(z) \\ &\leq \frac{\varrho}{\text{vol}(K)} \int_K \int_0^1 \left| \nabla u|_{c_{x,z}(t)} \right| dt \, d\text{vol}(z) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{\varrho}{\text{vol}(K)} \int_0^1 \int_K \left| \nabla u|_{c_{x,z}(t)} \right| d\text{vol}(z) dt. \end{aligned}$$

Setze nun  $K_t := \{c_{x,z}(t) \mid z \in K\}$ . In riemannschen Normalkoordinaten um  $x$  ist  $\varphi_{x,t} : z \mapsto c_{x,z}(t)$  gegeben durch  $\zeta \mapsto t \cdot \zeta$ . Setze nun  $\zeta' := t \cdot \zeta$ . Für die euklidischen

Volumenelemente gilt dann  $d\zeta = \left| \det\left(\frac{d\zeta}{d\zeta'}\right) \right| \cdot d\zeta' = t^{-n} \cdot d\zeta'$ , also für die riemannschen Volumenelemente

$$\frac{1}{C_2} \cdot t^{-n} \, d\text{vol} \leq (\varphi_{x,t})_* \, d\text{vol} \leq C_1 \cdot t^{-n} \, d\text{vol}.$$

Mit dem Transformationssatz erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \int_K \left| \nabla u|_{c_{x,z}(t)} \right| \, d\text{vol}(z) &\leq C_1 \cdot t^{-n} \int_{K_t} \left| \nabla u(z') \right| \, d\text{vol}(z') \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} C_1 \cdot t^{-n} \|\nabla u\|_{L^q(K_t)} \cdot \underbrace{(\text{vol}(K_t))^{1/q^*}}_{\leq C_3 \cdot t^n \cdot \text{vol}(K)} \\ &\leq C_4 \cdot t^{-n+n/q^*} \cdot \text{vol}(K)^{1/q^*} \cdot \|\nabla u\|_{L^q(M)} \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} \left| u(x) - \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, d\text{vol}(z) \right| &\leq \varrho \cdot C_4 \cdot (\text{vol}(K))^{-1+1/q^*} \int_0^1 t^{-n+n/q^*} \, dt \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\ &= \varrho \cdot C_4 \cdot (\text{vol}(K))^{-1/q} \underbrace{\int_0^1 t^{-n/q} \, dt}_{< \infty, \text{ da } q > n} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\ &= C_5 \cdot \frac{\varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.43.** Man kann die Poincaré-Ungleichung auch auf  $(r, s)$ -Tensoren verallgemeinern.

## 1.5. Hölder-Räume

**Definition 1.44.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Für  $u \in \mathcal{C}^k(M)$  setze

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{C}^k} &:= \sum_{j=0}^k \sup_{x \in M} |\nabla^j u|_x \\ \mathcal{C}_b^k(M) &:= \left\{ u \in \mathcal{C}^k(M) \mid \|u\|_{\mathcal{C}^k} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.45.**  $(\mathcal{C}_b^k(M), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^k})$  ist ein Banachraum. Ist  $M$  kompakt, so gilt  $\mathcal{C}_b^k(M) = \mathcal{C}^k(M)$ .

**Definition 1.46.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Falls  $0 < \alpha \leq 1$ , so setzen wir für  $u \in \mathcal{C}^k(M)$ :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} := \|u\|_{\mathcal{C}^k} + \sup_{\substack{x \in M \\ y \in B_x^*}} \left\{ \frac{|\tau_x^y \nabla^k u|_x - \nabla^k u|_y|}{d(x, y)^\alpha} \right\}$$

$$\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M) := \left\{ u \in \mathcal{C}^k(M) \mid \|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} < \infty \right\}.$$

Hierbei sei  $B_x^* := B_{i(x)}(x) \setminus \{x\}$  mit  $i(x) := \min\{\text{inj}(x), 1\}$  und  $\tau_x^y$  bezeichne die Parallelverschiebung von  $x$  nach  $y$  längs der eindeutigen kürzesten Geodätischen. Wir nennen  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M)$  den *Hölderraum  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}$  auf  $M$*  und nennen  $\alpha$  den *Hölder-Exponenten*. Den Raum  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$ , genannt den *lokalen Hölderraum*, definieren als den Raum aller Funktionen, die lokal in  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$  sind, d. h. der Raum der Funktionen  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass jedes  $x \in M$  eine offene Umgebung  $U_x$  mit  $u|_{U_x} \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U_x)$  besitzt. Funktionen in  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$  heißen  *$\alpha$ -Hölder-stetig*. Man ordnet dem (lokalen) Hölder-Raum  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M)$  bzw.  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$  und ihren Normen das Gewicht  $k + \alpha$  zu.

**Bemerkung 1.47.**

- (a)  $(\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}})$  ist ein Banachraum. Ist  $M$  kompakt, so gilt  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M) = \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$ .
- (b) Es gilt  $\mathcal{C}_b^1(M) \subset \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(M)$ , was man wie folgt zeigen kann. Für  $x, y \in M$  sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  die eindeutige kürzeste Geodätische mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ . Dann gilt  $d(x, y) = \mathcal{L}(\gamma) = |\dot{\gamma}(t)|$ . Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein  $\xi \in (0, 1)$  mit

$$u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\xi} u(\gamma(t)) = \nabla u|_{\gamma(\xi)} \cdot \dot{\gamma}(\xi),$$

und daraus folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{\zeta \in (0,1)} \left| \nabla u|_{\gamma(\zeta)} \right| \cdot d(x, y) = d(x, y) \cdot \|u\|_{\mathcal{C}^1}$$

Für alle  $y \in B_x^*$  gilt also

$$|u(x) - u(y)| / d(x, y)^\alpha \leq d(x, y)^{1-\alpha} \cdot \|u\|_{\mathcal{C}^1} \leq \|u\|_{\mathcal{C}^1}.$$

- (c) Wenn man ähnliche Argumente wie in (b) auf die Komponenten von  $\nabla^k u$  anwendet, erhält man  $\mathcal{C}_b^{k+1}(M) \subset \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M)$ .

**Bemerkungen 1.48.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Ist  $M$  kompakt, so definiert für jedes hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k} + \sup_{\substack{x \neq y \\ d(x,y) \leq \varepsilon}} \frac{|\tau_x^y(\nabla^k u|_x) - \nabla^k u|_y|}{d(x,y)^\alpha}$$

eine zu  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}}$  äquivalente Norm. Denn für  $x, y \in M$  mit  $d(x, y) > \varepsilon$  gilt:

$$\frac{|\tau_x^y(\nabla^k u|_x) - \nabla^k u|_y|}{d(x,y)^\alpha} < \varepsilon^{-\alpha} \cdot 2 \|\nabla^k u\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon^{-\alpha} \cdot 2 \|u\|_{\mathcal{C}^k}.$$

(b) Für  $0 < \alpha' < \alpha \leq 1$  haben wir stetige Einbettungen  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(M) \subset \mathcal{C}_b^{k,\alpha'}(M)$ , denn

$$\begin{aligned} \frac{|\tau_x^y(\nabla^k u|_x) - \nabla^k u|_y|}{d(x,y)^{\alpha'}} &= \frac{|\tau_x^y(\nabla^k u|_x) - \nabla^k u|_y|}{d(x,y)^\alpha} \cdot d(x,y)^{\alpha-\alpha'} \\ &\leq \frac{|\tau_x^y(\nabla^k u|_x) - \nabla^k u|_y|}{d(x,y)^\alpha}. \end{aligned}$$

(c) Wiederum kann man einfach die obigen Definitionen auf  $(r, s)$ -Tensoren verallgemeinern. Den Hölderraum aller  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ -Schnitte bzw.  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}$ -Schnitte von  $T^{(r,s)}M$  bezeichnen wir als  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(T^{(r,s)}M)$  bzw.  $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(T^{(r,s)}M)$ .

**Satz 1.49 (Sobolev'scher Einbettungssatz, 2. Teil).** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Seien  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ , sei  $0 < \alpha < 1$  und  $1 \leq q < \infty$  mit  $k + \ell - \frac{n}{q} \geq k + \alpha$ . Dann haben wir stetige Einbettungen

$$H^{k+\ell,q}(M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(M).$$

Die Aussage lässt sich auch auf Tensoren verallgemeinern:

$$H^{k+\ell,q}(T^{(r,s)}M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(T^{(r,s)}M).$$

Die Bedingung  $k + \ell - \frac{n}{q} \geq k + \alpha$  merkt man sich am besten wie folgt: das in Definition 1.10 definierte Gewicht von  $H^{k+\ell,q}(M)$  ist größer oder gleich dem in Definition 1.46 definierte Gewicht von  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ .

*Beweis.*

Wir beweisen den Satz für den Fall  $n \geq 3$ . Für  $n = 2$  siehe Übung 1.7.

(a) Es genügt, den Fall  $k = 0$  zu betrachten, denn die Aussage für  $k > 0$  folgt durch Anwendung des Falles  $k = 0$  auf  $u, \nabla u, \dots$  und  $\nabla^k u$ .

- (b) Es genügt ferner, die Aussage für  $\ell = 1$  zu beweisen, denn für  $\ell \geq 2$  haben wir nach Satz 1.15 dann eine Verkettung stetiger Einbettungen

$$\begin{aligned} H^{\ell,q}(M) &\subset H^{\ell,p_0}(M) \\ &\subset H^{\ell-1,p_1}(M) \\ &\vdots \\ &\subset H^{1,p_{\ell-1}}(M) \\ &\subset C^{0,\alpha}(M), \end{aligned}$$

wobei wir  $p_0, p_1, \dots, p_{\ell-1} \in [1, \infty)$  so wählen, dass

$$\ell - \frac{n}{q} \geq \ell - \frac{n}{p_0} = \ell - 1 - \frac{n}{p_1} = \dots = 1 - \frac{n}{p_{\ell-1}} \geq \alpha$$

gilt. Die Wahl von  $p_0 \in [1, q]$  ist hierbei so gewählt, dass  $\ell - \frac{n}{p_0} \in [\alpha, 1)$ , dann lassen sich hieraus die anderen  $p_i$  bestimmen.

- (c) In riemannschen Normalkoordinaten um  $x_0$  gilt für  $r = d(x, x_0) = |x|$ :

$$\begin{aligned} \nabla(r^2) &= d(r^2) = 2r \, dr \\ |\nabla(r^2)| &= 2r \end{aligned}$$

Hierbei wurde  $|dr| = 1$  benutzt, was daraus folgt, dass Geodätische konstante Länge haben.

$$\begin{aligned} \Delta(r^2)|_{x_0} &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (x^j)^2}{\partial (x^i)^2} \\ &= -2n. \end{aligned}$$

Damit ist also  $\Delta(r^2) = -2n + \mathcal{O}(r)$ . Für  $\beta \in \mathbb{R}$  ist also

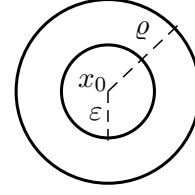
$$\begin{aligned} \Delta(r^\beta) &= \Delta((r^2)^{\beta/2}) \\ &= \frac{\beta}{2} \cdot (r^2)^{\beta/2-1} \cdot \Delta(r^2) - \frac{\beta}{2} \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \cdot (r^2)^{\beta/2-2} |\nabla(r^2)|^2 \\ &= \frac{\beta}{2} r^{\beta-2} \cdot (-2n + \mathcal{O}(r)) - \frac{\beta}{2} \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \cdot r^{\beta-4} \cdot 4r^2 \\ &= -\beta n \cdot r^{\beta-2} + \mathcal{O}(r^{\beta-1}) - \beta(\beta-2) \cdot r^{\beta-2} \\ &= -\beta(n + \beta - 2)r^{\beta-2} + \mathcal{O}(r^{\beta-1}). \end{aligned}$$

Speziell für  $\beta = 2 - n$  ist also:

$$\Delta(r^{2-n}) = \mathcal{O}(r^{1-n}) \quad (r \searrow 0) \quad (1.25)$$



- (d) Fixiere nun  $0 < \varrho < \text{inj}(M)$  und einen Punkt  $x_0 \in M$ . Für  $0 < \varepsilon < \varrho$  setze  $A_\varepsilon := \overline{B}_\varrho(x_0) - B_\varepsilon(x_0)$ . Für  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit  $\text{supp}(u) \subset B_\varrho(x_0)$  liefert die Green'sche Formel (1.20):



$$\int_{\partial A_\varepsilon} u \cdot \nabla_\nu r^{2-n} \, \text{dvol}^{\partial A_\varepsilon} = \int_{A_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla r^{2-n} \rangle \, \text{dvol} - \int_{A_\varepsilon} u \Delta r^{2-n} \, \text{dvol} \quad (1.26)$$

- (d<sub>1</sub>) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_\varepsilon} u \nabla_\nu r^{2-n} \, \text{dvol}^{\partial A_\varepsilon} &= \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \cdot \nabla_{-\text{grad } r} r^{2-n} \, \text{dvol}^{\partial B_\varepsilon(x_0)} \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \cdot (2-n) r^{1-n} \cdot (-1) \, \text{dvol}^{\partial B_\varepsilon(x_0)} \\ &= (n-2) \cdot \varepsilon^{1-n} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u \, \text{dvol}^{\partial B_\varepsilon(x_0)} \\ &\longrightarrow c_n \cdot u(x_0) \end{aligned} \quad (1.27)$$

An dieser Stelle ist es wichtig zu bemerken, dass  $c_n \neq 0$ , da  $n \neq 2$ .

- (d<sub>2</sub>) Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla r^{2-n} \rangle \, \text{dvol} \right| &\leq \int_{A_\varepsilon} |\nabla u| \cdot |(2-n)r^{1-n}| \, \text{dvol} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} |n-2| \cdot \|\nabla u\|_{L^q(A_\varepsilon)} \cdot \|r^{1-n}\|_{L^{q^*}(A_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Wir definieren wieder  $q^*$  durch  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|r^{1-n}\|_{L^{q^*}(A_\varepsilon)}^{q^*} &= \int_{A_\varepsilon} (r^{1-n})^{q^*} \, \text{dvol} \\ &\leq C_1 \cdot \int_\varepsilon^\varrho (r^{1-n})^{q^*} \cdot r^{n-1} \, \text{d}r \\ &= C_1 \cdot \int_\varepsilon^\varrho r^{(n-1)(1-q^*)} \, \text{d}r \end{aligned}$$

beschränkt für  $\varepsilon \searrow 0$ , da die Ungleichung  $(n-1)(1-q^*) > -1$  äquivalent zu  $\frac{1}{q} < \frac{1}{n}$  bzw.  $q > n$  ist, was sich aus  $\alpha > 0$  ergibt. Es folgt

$$\left| \int_{A_\varepsilon} \langle \nabla u, \nabla r^{2-n} \rangle \, \text{dvol} \right| \leq C_2 \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \quad (1.28)$$

mit einer Konstanten  $C_2$ , die nicht von  $\varepsilon$  abhängt.

(d<sub>3</sub>) Analog ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_\varepsilon} u \cdot \underbrace{\Delta(r^{2-n})}_{O(r^{1-n})} \, \text{dvol} \right| &\leq C_3 \cdot \int_{A_\varepsilon} |u| \cdot |r^{1-n}| \, \text{dvol} \\ &\leq C_4 \cdot \|u\|_{L^q} \cdot \|r^{1-n}\|_{L^{q^*}(A_\varepsilon)} \\ &\leq C_5 \cdot \|u\|_{L^q} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Einsetzen von (1.27), (1.28) und (1.29) in (1.26) und der Grenzwert  $\varepsilon \searrow 0$  liefern:

$$|u(x_0)| \leq C_6 \cdot \|u\|_{H^{1,q}}.$$

Man beachte, dass es hier wichtig war, dass wegen  $n \neq 2$  die Konstante  $c_n$  in (1.27) nicht verschwindet.

- (e) Sei nun  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  ohne Bedingung an  $\text{supp}(u)$ . Wähle eine glatte Abschneidefunktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\chi(t) \equiv 1$  für  $t \leq \frac{1}{2}$ ,  $1 \geq \chi(t) \geq 0$  für  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  und  $\chi(t) \equiv 0$  für  $t \geq 1$  und setze  $\tilde{u}(x) := \chi\left(\frac{d(x, x_0)}{\varrho}\right) \cdot u(x)$ . Damit erhalten wir:

$$|u(x_0)| = |\tilde{u}(x_0)| \leq C_6 \cdot \|\tilde{u}\|_{H^{1,q}} \leq C_7 \cdot \|u\|_{H^{1,q}}.$$

Maximieren über  $x_0 \in M$  liefert also

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} \leq C_7 \cdot \|u\|_{H^{1,q}}. \quad (1.30)$$

- (f) Mithilfe von Bemerkung 1.12 erhalten wir aus Ungleichung (1.30) eine stetige Abbildung  $H^{1,q}(M) \rightarrow \mathcal{C}^0(M)$ . Aus der Ungleichung  $\|u\|_{L^p} \leq \text{vol}(M)^{1/p} \|u\|_{\mathcal{C}^0}$  erhalten wir eine stetige Abbildung  $\mathcal{C}^0(M) \rightarrow L^p(M)$  und offensichtlich ergibt die Komposition die bereits diskutierte Abbildung  $H^{1,q}(M) \rightarrow L^p(M)$ , die bekanntermaßen injektiv ist. Somit ist auch  $H^{1,q}(M) \rightarrow \mathcal{C}^0(M)$  injektiv.

Sei nun  $u \in H^{1,q}(M)$ . Wähle  $u_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit  $u_i \rightarrow u$  in  $H^{1,q}(M)$ . Dann ist  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H^{1,q}(M)$ , also mit (1.30) auch eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{C}^0(M)$ . Da  $\mathcal{C}^0(M)$  vollständig ist, gibt es also ein  $v \in \mathcal{C}^0(M)$  mit  $u_i \rightarrow v$  in  $\mathcal{C}^0(M)$ . Die Konvergenz  $u_i \rightarrow v$  ist gleichmäßig, also insbesondere auch punktweise. Andererseits konvergiert  $u_i$  in  $H^{1,q}(M)$ , also auch in  $L^q(M)$  gegen  $u$ , und dies impliziert punktweise Konvergenz fast überall. Damit ist  $u = v$  fast überall, mithin besitzt  $u$

einen stetigen Repräsentanten. In diesem Sinne ist  $H^{1,q}(M) \subset \mathcal{C}^0(M)$  als Untervektorraum. Die Ungleichung (1.30) gilt für alle Funktionen in dem dichten Teilraum  $\mathcal{C}^\infty(M) \subset H^{1,q}(M)$ , also wegen der Stetigkeit der Norm auch für alle  $u \in H^{1,q}(M)$ . Damit haben wir die stetige Einbettung

$$H^{1,q}(M) \subset \mathcal{C}^0(M)$$

erhalten.

- (g) Auf Grund der Bemerkung 1.48 (b) genügt es nun, eine stetige Einbettung  $H^{1,q}(M) \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$  für  $\alpha := 1 - \frac{n}{q}$  zu finden. Für dieses  $\alpha$  suchen wir also eine Schranke  $C$ , so dass für alle  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  und für alle  $x \neq y$  mit  $d(x, y) \leq \frac{\text{inj}(M)}{3}$  gilt:

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)^\alpha} \leq C \cdot \|u\|_{H^{1,q}}.$$

Sei also  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  und seien  $x, y \in M$  mit  $d(x, y) \leq \frac{\text{inj}(M)}{3}$ . Verbinde  $x$  und  $y$  durch die (bis auf Reparametrisierung) eindeutige kürzeste Geodätische  $c$ . Sei  $x_0$  der Mittelpunkt von  $c$ , also  $d(x, x_0) = d(x_0, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$ . Setze nun  $\varrho := d(x, y)$  und benutze die Poincaré-Ungleichung für  $K := \overline{B}_{\varrho/2}(x_0) \subset \overline{B}_\varrho(x_0)$ . Es gilt also:

$$\left| u(x) - \underbrace{\frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K u(z) \, \text{dvol}(z)}_{=: u_K} \right| \leq \frac{C \cdot \varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_K| + |u_K - u(y)| \\ &\leq \frac{2 \cdot C \cdot \varrho}{\text{vol}(K)^{1/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\ &\leq \frac{C' \cdot \varrho}{\varrho^{n/q}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \\ &\leq C' \cdot \varrho^{1-n/q} \cdot \|u\|_{H^{1,q}} \\ &= C' \cdot d(x, y)^\alpha \cdot \|u\|_{H^{1,q}}. \end{aligned}$$

□

**Übung 1.7.** Führe den Beweis des Satzes für  $n = 2$  durch: Ersetze dazu im Beweisschritt (d) die Funktion  $r^{2-n}$  durch  $\ln(r)$ .

**Lemma 1.50.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $k \in \mathbb{N}_0$ , und seien  $0 < \alpha < \alpha' < 1$ . Dann ist die Einbettung

$$\mathcal{C}^{k,\alpha'}(M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$$

kompakt.

*Beweis.*

Wie zuvor genügt es, den Fall  $k = 0$  zu betrachten. Sei also  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathcal{C}^{0,\alpha'}$ . Für ein  $C_1 > 0$  ist dann

$$|u_i(x) - u_i(y)| \leq C_1 \cdot d(x, y)^{\alpha'}$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \neq y$  mit  $d(x, y) \leq \frac{\text{inj}(M)}{2}$ . Insbesondere ist also  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gleichgradig stetig (und nach Voraussetzung auch beschränkt in  $\mathcal{C}^0(M)$ ). Der Satz von Arzela und Ascoli 1.20 liefert also eine konvergente Teilfolge in  $\mathcal{C}^0(M)$ , die wir wieder mit  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  bezeichnen.

Für die Differenzen  $w := u_i - u_j$  berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} \frac{|w(x) - w(y)|}{d(x, y)^\alpha} &= \left( \frac{|w(x) - w(y)|}{d(x, y)^{\alpha'}} \right)^{\alpha/\alpha'} \cdot |w(x) - w(y)|^{1-\alpha/\alpha'} \\ &\leq (\|w\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha'}})^{\alpha/\alpha'} \cdot (2\|w\|_{\mathcal{C}^0})^{1-\alpha/\alpha'} \\ &\leq C_2 \cdot \|w\|_{\mathcal{C}^0}^{1-\alpha/\alpha'}. \end{aligned}$$

Wegen  $1 - \frac{\alpha}{\alpha'} > 0$  ist also  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$ . □

**Bemerkung 1.51.** Insbesondere ist dann auch die Einbettung  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(M) \subset \mathcal{C}^k(M)$  kompakt. Denn zu  $0 < \alpha < 1$  wählen wir  $\alpha'$  mit  $0 < \alpha' < \alpha$  und erhalten:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}^{k,\alpha}(M) & \stackrel{1.50}{\subset} & \mathcal{C}^{k,\alpha'}(M) \quad \text{kompakt} \\ & \subset & \mathcal{C}^k(M) \quad \text{stetig.} \end{array}$$

**Satz 1.52 (Rellich-Kondrakhov, 2. Teil).** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Seien  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  und sei  $1 \leq q < \infty$ , so dass  $k + \ell - \frac{n}{q} > k + \alpha$ . Dann ist die Einbettung

$$H^{k+\ell,q}(M) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$$

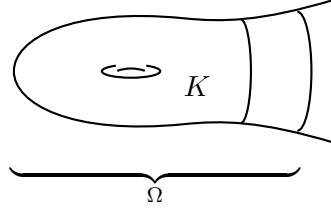
kompakt.

Die Ungleichung  $k + \ell - \frac{n}{q} > k + \frac{n}{p}$  merkt man sich am besten wie folgt: das in Definition 1.10 definierte Gewicht von  $H^{k+\ell,q}(M)$  ist größer als das in Definition 1.46 definierte Gewicht von  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ .

*Beweis.* Wähle ein  $\alpha' \in (\alpha, \ell - \frac{n}{q})$ . Dann ist

$$\begin{array}{lll} H^{k+\ell,q}(M) & \stackrel{1.49}{\subset} & \mathcal{C}^{k,\alpha'}(M) \quad \text{stetig} \\ & \stackrel{1.50}{\subset} & \mathcal{C}^{k,\alpha}(M) \quad \text{kompakt.} \end{array}$$

**Bemerkung 1.53 (Lokaler Sobolev'scher Einbettungssatz).** Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit,  $K \subset M$  kompakt und  $\Omega \subset M$  offen mit  $K \subset \Omega$ .



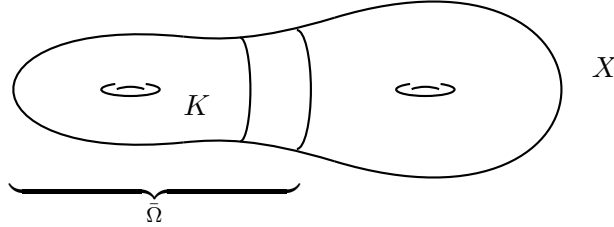
(a) Für  $\ell - \frac{n}{q} \geq -\frac{n}{r}$  gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{H^{k,r}(K)} \leq C \cdot \|u\|_{H^{k+\ell,q}(\Omega)}. \quad (1.31)$$

(b) Für  $\ell - \frac{n}{q} \geq \alpha$  gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(K)} \leq C \cdot \|u\|_{H^{k+\ell,q}(\Omega)}. \quad (1.32)$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $\bar{\Omega}$  kompakt ist. Bette nun  $\bar{\Omega}$  isometrisch in eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit  $X$  ein. Zum Beispiel können wir  $\Omega$  zunächst evtl. etwas vergrößern, so dass  $\partial\Omega$  eine glatte Hyperfläche ist. Man kann nun zwei Kopien des eventuell vergrößerten  $\bar{\Omega}$  an ihrem gemeinsamen Rand zusammenkleben und mit einer geeigneten glatten Struktur versehen und wir erhalten eine glatte Mannigfaltigkeit  $X$ . Diese Konstruktion nennt sich die Verdoppelung von  $\bar{\Omega}$ . Man kann nun die bereits auf der ersten Kopie von  $\bar{\Omega}$  definierte riemannsche Metrik glatt auf  $X$  fortsetzen.



(a) Wähle eine Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(X)$  mit  $\chi|_K \equiv 1$  und,  $\text{supp}(\chi) \subset \Omega$  und  $\chi \geq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{k,r}(K)} &\leq \|\chi \cdot u\|_{H^{k,r}(X)} \\ &\leq C \cdot \|\chi \cdot u\|_{H^{k+\ell,q}(X)} \\ &= C \cdot \|\chi \cdot u\|_{H^{k+\ell,q}(\Omega)} \\ &\leq C' \cdot \|u\|_{H^{k+\ell,q}(\Omega)}. \end{aligned}$$

(b) Die Abschätzung der Hölder-Norm zeigt man ganz analog. □

## 1.6. Das Maximum-Prinzip

**Proposition 1.54 (Schwach Maximum-Prinzip).** Sei  $(\bar{M}, g)$  eine zusammenhängende kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M \neq \emptyset$ . Sei  $h \in C^\infty(\bar{M})$  mit  $h \geq 0$ . Dann gilt für jedes  $u \in C^2(\bar{M})$  mit  $(\Delta + h)u \leq 0$  und  $u \not\equiv 0$ :

$$\max_{x \in \bar{M}} u(x) = \max_{x \in \partial M} u(x).$$

Für jedes  $v \in C^2(\bar{M})$  mit  $(\Delta + h)v \geq 0$  und  $v \not\equiv 0$  ist

$$\min_{x \in \bar{M}} v(x) = \min_{x \in \partial M} v(x).$$

Ist  $h \equiv 0$ , so sind die Voraussetzungen  $u \not\equiv 0$  bzw.  $v \not\equiv 0$  überflüssig.

*Beweis.*

- (a) Sei zunächst  $(\Delta + h)u < 0$  auf  $\bar{M}$ . Falls  $\max_{x \in \bar{M}} u(x) \neq \max_{x \in \partial M} u(x)$ , so gibt es ein  $y$  im Innern von  $M$  mit  $u(y) = \max_{x \in \bar{M}} u(x) > \max_{x \in \partial M} u(x)$ . Dann ist  $\nabla u|_y = 0$  und  $\nabla^2 u|_y$  negativ semi-definit. Da nun  $h \equiv 0$  oder  $u \not\equiv 0$  und damit  $u(y) = \max_{x \in \bar{M}} u(x) \geq 0$  gilt, haben wir in jedem Fall  $h(y)u(y) \geq 0$ . Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\operatorname{tr}(\nabla^2 u)|_y \\ &= (\Delta u)(y) \\ &< -h(y)u(y) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

was offensichtlich den Widerspruch  $0 < 0$  ergibt.

- (b) Sei nun  $(\Delta + h)u \leq 0$ . Wähle  $f \in C^\infty(\bar{M})$  ohne kritische Punkte, d. h.  $\nabla f(x) \neq 0$  für alle  $x \in \bar{M}$ . (Dass ein solches  $f$  existiert, zeigen wir unten in Lemma 1.55.) Dann gibt es  $C_1, C_2 > 0$  so dass

$$\begin{aligned} |\nabla f| &\geq C_1 && \text{auf } \bar{M} \\ |\Delta f| &\leq C_2 && \text{auf } \bar{M}. \end{aligned}$$

Für  $\gamma \geq \frac{2C_2}{C_1^2}$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} \Delta(e^{\gamma f}) &= \gamma e^{\gamma f} \cdot \Delta f - \gamma^2 e^{\gamma f} \cdot |\nabla f|^2 \\ &\leq e^{\gamma f} (\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2) \\ &\leq -\gamma \cdot C_2 \cdot e^{\gamma f} \quad \text{für } \gamma \geq \frac{2C_2}{C_1^2}. \end{aligned}$$

Für ein hinreichend großes  $\gamma > 0$  und für beliebiges  $\varepsilon > 0$  setze  $u_\varepsilon := u + \varepsilon \cdot e^{\gamma f}$ . Berechne nun:

$$\begin{aligned} (\Delta + h)u_\varepsilon &= (\Delta + h)u + \varepsilon(\Delta + h)e^{\gamma f} \\ &\leq 0 + \varepsilon \cdot (-\gamma \cdot C_2 + \|h\|_{C^0}) \cdot e^{\gamma f} \\ &< 0. \end{aligned}$$

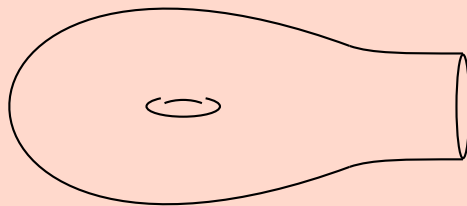
Wegen  $u_\varepsilon > u$  ist mit  $u \not\leq 0$  auch  $u_\varepsilon \not\leq 0$ . Nach (a) ist dann

$$\max_{x \in \bar{M}} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \partial M} u_\varepsilon(x),$$

also im Grenzwert  $\varepsilon \searrow 0$  auch  $\max_{x \in \bar{M}} u(x) = \max_{x \in \partial M} u(x)$ .

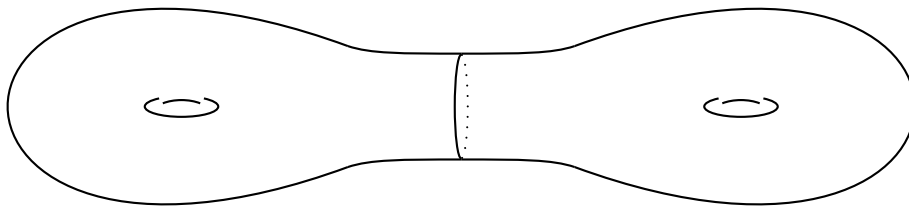
(c) Die Behauptung für  $v$  folgt aus der für  $u := -v$ . □

**Lemma 1.55.** Sei  $\bar{M}$  eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M \neq \emptyset$ . Dann gibt es eine Funktion  $f \in C^\infty(\bar{M})$  ohne kritische Punkte.



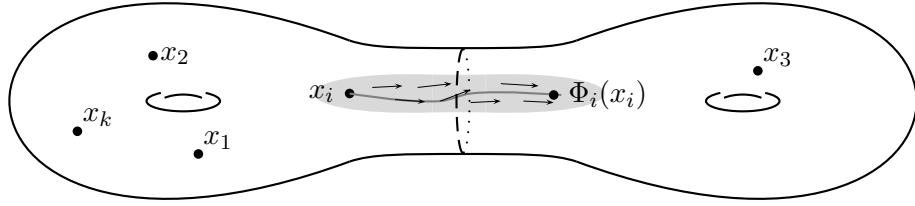
*Beweis.*

Verdoppele  $\bar{M}$  zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $X$ .



Wähle  $h \in C^\infty(X)$  mit isolierten kritischen Punkten (z. B. eine Morsefunktion). Da  $X$  kompakt ist, ist die Menge der kritischen Punkte  $\text{Crit}(h) = \{x \in X \mid \nabla h(x) = 0\}$  endlich. Sei also  $\text{Crit}(h) \cap \bar{M} = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Für  $i \in \{1, \dots, k\}$  wähle Diffeomorphismen  $\Phi_i : X \rightarrow X$ , so dass  $\Phi_i(x_i) \in X \setminus \bar{M}$  und  $\Phi_i(y) = y$  für alle  $y \in \text{Crit}(h) \setminus \{x_i\}$  und mit  $\Phi_i(X \setminus \bar{M}) \subset X \setminus \bar{M}$ .<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Solch einen Diffeomorphismus erhält man z. B. als Fluss eines Vektorfelds, dessen Träger in einer



Induktiv erhalten wir einen Diffeomorphismus  $\Phi = \Phi_k \circ \dots \circ \Phi_1 : X \rightarrow X$  mit  $\Phi(\text{Crit}(h)) \subset X \setminus \bar{M}$ . Damit ist  $h \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(X)$  und

$$\text{Crit}(h \circ \Phi^{-1}) = \Phi(\text{Crit}(h)) \subset X \setminus \bar{M}.$$

Also hat  $f := h \circ \Phi^{-1}|_{\bar{M}} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{M})$  keine kritischen Punkte.  $\square$

**Folgerung 1.56.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $h \geq 0$  und  $h \not\equiv 0$ . Dann gilt für jedes  $u \in \mathcal{C}^2(M)$  mit  $(\Delta + h)u \leq 0$ :

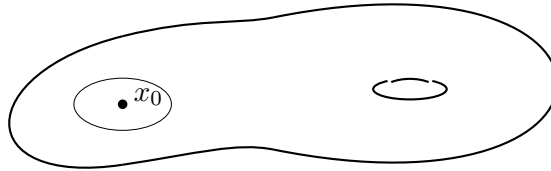
$$u \equiv 0 \quad \text{oder} \quad u < 0 \quad \text{auf } M.$$

Für jedes  $v \in \mathcal{C}^2(M)$  mit  $(\Delta + h)v \geq 0$  gilt:

$$v \equiv 0 \quad \text{oder} \quad v > 0 \quad \text{auf } M.$$

*Beweis.*

- (a) Sei  $u \in \mathcal{C}^2(M)$  mit  $(\Delta + h)u \leq 0$  und  $u \not\equiv c \in \mathbb{R}$ . Wähle  $x_0 \in M$  mit  $u(x_0) = \min_{x \in M} u(x)$ , also insbesondere  $u(x_0) < \max_{x \in M} u(x)$ .



Für ein hinreichend kleines  $\varrho > 0$  ist dann auch

$$\max_{x \in B_\varrho(x_0)} u(x) < \max_{x \in M} u(x). \quad (1.33)$$

kleinen Tubenumgebung einer Kurve liegt, die den Punkt  $x_i$  mit einem Punkt in  $X \setminus \bar{M}$  verbindet und alle anderen Punkte  $y \in \text{Crit}(h)$  meidet, und auf dem Rand  $\partial M$  von  $\bar{M}$  verschwindet oder nach außen, d. h. in  $X \setminus \bar{M}$ , zeigt. Ist das Vektorfeld tangential zu dieser Kurve, und entlang dieser Kurve nie Null, und auf  $\bar{M}$  heraus orientiert, so verschiebt der zugehörige Fluss den Punkt  $x_i$  nach  $X \setminus \bar{M}$ .



Das schwache Maximum-Prinzip 1.54, angewandt auf  $M \setminus B_\varrho(x_0)$ , liefert  $u < 0$  auf  $M \setminus B_\varrho(x_0)$  oder

$$\begin{aligned} \max_{x \in M \setminus B_\varrho(x_0)} u(x) &= \max_{x \in \partial B_\varrho(x_0)} u(x) \\ &\leq \max_{x \in \bar{B}_\varrho(x_0)} u(x) \\ &< \max_{x \in M} u(x). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Aus (1.33) und (1.34) folgt der Widerspruch  $\max_{x \in M} u(x) < \max_{x \in M} u(x)$ . Also ist  $u < 0$  auf  $M \setminus B_\varrho(x_0)$ . Da dies für jedes hinreichend kleine  $\varrho > 0$  gilt, ist auch  $u < 0$  auf  $M \setminus \{x_0\}$ . Da die Funktion  $u$  in  $x_0$  ihr Minimum annimmt, ist also auch  $u < 0$  auf ganz  $M$ .

- (b) Sei nun  $u \equiv c \in \mathbb{R}$  konstant. Dann ist zu zeigen:  $c \leq 0$ . Sei  $x_1 \in M$  mit  $h(x_1) > 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\geq ((\Delta + h)u)(x_1) \\ &= \underbrace{h(x_1)}_{>0} \cdot c, \end{aligned}$$

also  $c \leq 0$ .

- (c) Die Behauptung für  $v$  folgt mit  $u := -v$ . □

**Bemerkung 1.57.** Im Fall  $h \equiv 0$  gilt: falls  $\Delta u \leq 0$ , so ist

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \Delta u \, \text{dvol} \\ &= \int_M 1 \cdot \Delta u \, \text{dvol} \\ &= \int_M \langle \nabla 1, \nabla u \rangle \, \text{dvol} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $\Delta u \equiv 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M u \Delta u \, \text{dvol} \\ &= \int_M \underbrace{\langle \nabla u, \nabla u \rangle}_{|\nabla u|^2} \, \text{dvol}, \end{aligned}$$

also  $\nabla u \equiv 0$ , somit  $u \equiv c \in \mathbb{R}$ .

In diesem Fall sind somit folgende vier Aussagen äquivalent:

- (1)  $\Delta u \leq 0$ ,
- (2)  $\Delta u \equiv 0$ ,
- (3)  $\nabla u \equiv 0$ ,
- (4)  $u$  konstant.

## 1.7. Differentialoperatoren und schwache Lösungen

**Definition 1.58.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (a) Eine lineare Abbildung  $L : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  heißt *(linearer) Differentialoperator der Ordnung  $\leq k$* , falls es Homomorphismenfelder

$$A_j \in \mathcal{C}^\infty(M; \underbrace{\text{Hom}(T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M, \mathbb{R})}_j)$$

für  $j \geq 1$  und  $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gibt, so dass  $L$  von der Form

$$Lu = \sum_{j=0}^k A_j (\nabla^j u) \quad (1.35)$$

ist.

- (b) Dies lässt sich auf Vektorbündel verallgemeinern. Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorbündel über  $M$  mit  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Es sei ein Zusammenhang auf  $V$  gegeben, wodurch  $\nabla^j u$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $u \in \mathcal{C}^\infty(V)$  definiert ist. Dann heißt  $L : \Gamma(V) = \mathcal{C}^\infty(M; V) \rightarrow \Gamma(W)$  ein *( $\mathbb{K}$ -linearer) Differentialoperator der Ordnung  $\leq k$* , falls es Homomorphismenfelder  $A_j \in \mathcal{C}^\infty(M; \underbrace{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \cdots \otimes_{\mathbb{R}} T^*M \otimes_{\mathbb{R}} V, W)}_j)$  für  $j \geq 1$  und

$A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M; \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$  gibt, so dass  $L$  von der Form (1.35) ist.

Möchte man betonen, dass es sich um einen Differentialoperator wie (a) handelt, so nennt man  $L$  einen *skalaren Differentialoperator*.

Wir erinnern, dass in unserer Notation  $\Gamma(W) = \mathcal{C}^\infty(V) = \mathcal{C}^\infty(M; V)$  gilt. Wir schreiben die Operatoren im Vektorbündel-Fall als  $L : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$ , um zu betonen, dass Schnitte von  $V$  auf Schnitte von  $W$  abgebildet werden. Die Regularität (also die Glattheit) der Schnitte, spielt im Hinblick auf Lemma 1.61 eine untergeordnete Rolle.

**Bemerkung 1.59.** In lokalen Koordinaten auf  $U \subset M$  ist ein skalarer Differentialoperator von der Form

$$Lu = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

mit  $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{C}^\infty(U)$  und  $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

**Beispiele 1.60.**

- (1) Ein Operator der Ordnung  $k = 0$  ist offensichtlich von der Form  $Lu = A_0 \cdot u$  für ein  $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M; \text{Hom}(V, W))$ , also im skalaren Fall  $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .
- (2) Jeder skalare Operator der Ordnung  $k \leq 1$  ist von der Form  $Lu = \nabla_X u + A_0 \cdot u$  für ein glattes Vektorfeld  $X$ .
- (3) Wir diskutieren hier insbesondere zwei skalare Operatoren der Ordnung  $k = 2$ , nämlich den *Laplace-Operator*

$$Lu = \Delta u = -\text{tr} \nabla^2 u$$

mit  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = -\text{tr}$  und für  $n = \dim M \geq 3$  den *Yamabe-Operator*, auch *konformer Laplace-Operator* genannt:

$$Lu = Yu = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + \text{scal}^g \cdot u$$

mit  $A_0 = \text{scal}^g$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = -\frac{4(n-1)}{n-2} \text{tr}$ .

**Lemma 1.61.**

- (a) Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $L$  ein skalarer Differentialoperator der Ordnung  $\leq k$ . Sei wieder  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in (0, 1]$ . Dann definiert Formel (1.35) lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{k+\ell}(M) &\rightarrow \mathcal{C}^\ell(M) \\ \mathcal{C}^{k+\ell, \alpha}(M) &\rightarrow \mathcal{C}^{\ell, \alpha}(M) \end{aligned}$$

- (b) Ist  $M$  außerdem kompakt, dann sind die folgenden durch (1.35) definierten Abbildungen stetig, bzw. setzen  $L$  eindeutig zu einer solchen stetigen linearen Abbildung fort

$$\begin{aligned} H^{k+\ell, q}(M) &\rightarrow H^{\ell, q}(M) \\ \mathcal{C}_b^{k+\ell}(M) &\rightarrow \mathcal{C}_b^\ell(M) \\ \mathcal{C}_b^{k+\ell, \alpha}(M) &\rightarrow \mathcal{C}_b^{\ell, \alpha}(M) \end{aligned}$$

fort.

Analoge Aussagen gelten für Differentialoperatoren auf Vektorbündeln.

Man beachte, dass wir auf den Räumen  $\mathcal{C}^\ell(M)$  und  $\mathcal{C}^{\ell, \alpha}(M)$  für nicht-kompakte  $M$  keine Norm definiert haben und deswegen in Teil (a) keine Aussage zur Stetigkeit bzw. Beschränktheit der Abbildung machen. Falls  $M$  kompakt ist, so gilt wieder  $\mathcal{C}_b^\ell(M) = \mathcal{C}^\ell(M)$

und  $\mathcal{C}_b^{\ell,\alpha}(M) = \mathcal{C}^{\ell,\alpha}(M)$  als Vektorraum und wir interpretieren diese wiederum als normierte Räume. Die Abbildungen in (b) sind für nicht-kompakte  $M$  nicht wohldefiniert, wie man einen Operator 0-ter Ordnung sieht, der mit einer unbeschränkten glatten Funktion  $A_0 \in \mathcal{C}^\infty(M) \setminus \mathcal{C}_b^\infty(M)$  multipliziert:  $Lu = A_0 \cdot u$ .

*Beweis.*

(a) Die Wohldefiniertheit der Abbildung  $\mathcal{C}^{k+\ell}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\ell(M)$  durch Formel (1.35) ist offensichtlich. Um  $Lu \in \mathcal{C}^{\ell,\alpha}(M)$  für  $u \in \mathcal{C}^{k+\ell,\alpha}(M)$  zu zeigen, schätzt man den zusätzlichen Term ähnlich wie in (b) ab.

(b<sub>1</sub>) Wir suchen Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gilt:

$$\|Lu\|_{H^{\ell,q}} \leq C \cdot \|u\|_{H^{k+\ell,q}}. \quad (1.36)$$

Da  $M$  kompakt ist, gibt es für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  und alle  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  Konstanten  $C_{j,i} \in \mathbb{R}$ , so dass  $|\nabla^i A_j| \leq C_{j,i}$  auf  $M$ . Für  $0 \leq m \leq \ell$  berechne nun:

$$\begin{aligned} \|\nabla^m (A_j (\nabla^j u))\|_{L^q} &= \|\nabla^{m-1} ((\nabla A_j) \cdot \nabla^j u + A_j (\nabla^{j+1} u))\|_{L^q} \\ &= \left\| \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (\nabla^i A_j) (\nabla^{m-i+j} u) \right\|_{L^q} \\ &\leq \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} C_{j,i} \underbrace{\|\nabla^{m-i+j} u\|_{L^q}}_{\leq \|u\|_{H^{m+j,q}}} \\ &\leq C'_m \cdot \|u\|_{H^{m+j,q}} \end{aligned}$$

für geeignete  $C'_m \in \mathbb{R}$ . Damit ist also

$$\begin{aligned} \|\nabla^m Lu\|_{L^q} &\leq C'_m \sum_{j=0}^m \|u\|_{H^{m+j,q}} \\ &\leq C''_m \cdot \|u\|_{H^{m+k,q}}. \end{aligned}$$

Damit ist schließlich

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{H^{\ell,q}} &\leq \sum_{m=0}^{\ell} C'''_m \cdot \|u\|_{H^{m+k,q}} \\ &\leq C \cdot \|u\|_{H^{\ell+k,q}}. \end{aligned}$$

(b<sub>2</sub>) Auf ähnliche Art und Weise zeigt man die Beschränktheit bezüglich der  $\mathcal{C}^\ell$ - bzw. der  $\mathcal{C}^{\ell,\alpha}$ -Normen, indem man anstelle von  $\|\cdot\|_{L^q}$  die Normen  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$  bzw.  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$  nutzt.

□

**Lemma 1.62.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $L$  ein skalarer Differentialoperator der Ordnung  $\leq k$ . Dann gibt es einen eindeutigen Differentialoperator  $L^*$  der Ordnung  $\leq k$ , so dass für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$  gilt:

$$(L\varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, L^*\psi)_{L^2}. \quad (1.37)$$

Hierbei ist  $(\varphi, \psi)_{L^2} := \int_M \varphi \cdot \psi \, d\text{vol}$  das  **$L^2$ -Skalarprodukt**. Gleichung (1.37) gilt dann sogar für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^k(M)$  mit  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi$  kompakt.

Das Lemma ist auch für Differentialoperatoren auf Vektorbündeln

$$L : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$$

gültig, vorausgesetzt, die Vektorbündel  $V$  und  $W$  tragen (faserweise) Skalarprodukte  $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$  und  $\langle \bullet, \bullet \rangle_W$ , und das  $L^2$ -Skalarprodukt ist dann für  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^k(V)$  definiert als  $(\varphi, \psi)_{L^2(V)} := \int_M \langle \varphi, \psi \rangle_V \, d\text{vol}$ , bzw. analog für  $W$  statt  $V$ .

Man erhält diesen Operator durch  $\leq k$ -fache partielle Integration. Der Beweis wird teilweise als Übung gestellt und deswegen erst später hinzugefügt.

**Definition 1.63.**  $L^*$  heißt der zu  $L$  formal adjungierte Operator. Gilt  $L^* = L$ , so heißt  $L$  formal selbstadjungiert.

**Beispiel 1.64.** Für den Laplace-Operator  $L = \Delta$  ist nach (1.20)  $L^* = \Delta$ , d. h.  $\Delta$  ist formal selbstadjungiert.

**Beispiel 1.65.** Sei  $M = \mathbb{R}$  und  $L = x \cdot \frac{d}{dx}$ . Um den formal adjungierten Operator  $L^*$  zu bestimmen, berechnen wir für  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} (\psi, L^*\varphi)_{L^2} &= (L\psi, \varphi)_{L^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot \psi'(x)) \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot (x \cdot \varphi)'(x) \, dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot (x \cdot \varphi'(x) + \varphi(x)) \, dx \\ &= - (\psi, x \varphi' + \varphi)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit ist  $L^* = -x \frac{d}{dx} - 1$ .

**Beispiel 1.66.** Der formal adjungierte Operator zu  $\nabla : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  ist die Divergenz  $\delta : \Omega^1(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ . Dies folgt aus den Green'schen Formeln 1.39, genauer aus (1.19).

**Beispiel 1.67.** Sei  $V$  ein Vektorbündel mit einem faserweisen Skalarprodukt  $\langle \bullet, \bullet \rangle_V$  und einem damit kompatiblen Zusammenhang<sup>7</sup>  $\nabla$ . Wir können dann  $\nabla$  als Differentialoperator der Ordnung  $\leq$  auffassen und erhalten

$$\nabla : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes V).$$

Ist  $x \mapsto e_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, \dim M$  eine Familie glatter orthonormaler Vektorfelder, die auf einer kleinen Umgebung  $U$  eines Punktes  $p \in M$  definiert sind und ist  $e_i^b = g(e_i, \bullet)$  so gilt auf  $U$

$$\nabla \varphi = \sum_{i=1}^{\dim M} e_i^b \otimes \nabla_{e_i} \varphi.$$

Man rechnet nach (siehe Übung 1.8), dass der formal adjungierte Operator erfüllt:

$$\nabla^* \psi = - \sum_{i=1}^{\dim M} (\nabla_{e_i}(\psi(e_i)) - \psi(\nabla_{e_i} e_i)) = -(\text{tr}_g \otimes \text{id}_V)(\nabla \psi), \quad (1.38)$$

wobei wir für  $\psi \in \Gamma(T^*M \times V)$  den lokal auf  $U$  definierten Schnitt  $\psi(e_i) \in \Gamma(V)$  durch Einsetzen erhalten.

Diesen Operator  $\nabla^* \nabla$  nennt man den *Zusammenhangs-Laplace-Operator* auf  $V$ .

Im Spezialfall  $V = \bigwedge^k T^*M$  mit dem Levi-Civita-Zusammenhang erhalten wir den *Zusammenhangs-Laplace-Operator auf  $k$ -Formen*:

$$\Delta^k := \nabla^* \nabla : \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right) \rightarrow \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right).$$

Ist  $V$  das triviale reelle Vektorbündel (mit 1-dimensionalen Fasern) mit dem trivialen Zusammenhang, so gilt

$$\nabla^* \nabla = \Delta = \delta \nabla = \Delta^0$$

für den in Definition 1.35 definierten Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta$ .

**Übung 1.8.** (a) Beweisen Sie (1.38).

(b) Zeigen Sie, dass  $\Delta^1 \circ \nabla - \nabla \circ \Delta$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\leq 2$  ist.

**Bemerkung 1.68.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $L$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\leq k$ . Für  $u \in \mathcal{C}^k(M)$  ist die Gleichung

$$Lu = f \quad (1.39)$$

äquivalent zu

$$(Lu, \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M). \quad (1.40)$$

und somit zu

$$(u, L^* \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M).$$

Diese Gleichung kann evtl. auch erfüllt sein, wenn  $u$  gar nicht differenzierbar ist.

<sup>7</sup>Mit "kompatibel" ist hier gemeint: es gilt die Produkt-Regel  $\partial_X \langle \varphi, \psi \rangle_V = \langle \nabla_X \varphi, \psi \rangle_V + \langle \varphi, \nabla_X \psi \rangle_V$

**Definition 1.69.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Vektorbündeln  $V, W \rightarrow M$ , die ein faserweises Skalarprodukt tragen und dazu kompatiblen Zusammenhängen. Sei  $L : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(W)$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\leq k$ . Sei  $u \in L^1_{\text{loc}}(M; V)$  und  $f \in L^1_{\text{loc}}(M; W)$ . Wir sagen:

- (1)  $Lu = f$  gilt *klassisch (von Ordnung  $k$ )*, falls  $u \in \mathcal{C}^k(M)$  mit  $Lu = f$ ,
- (2)  $Lu = f$  gilt *im starken Sinne (bezüglich  $H^{k,q}$ )* für  $q \in [1, \infty]$ , falls  $u \in H^{k,q}(M)$  und falls für den gemäß Lemma 1.61 (b) erweiterten Operator  $L$  und mit  $\ell = 0$  die Gleichung  $Lu = f$  erfüllt ist.
- (3)  $Lu = f$  gilt *im schwachen Sinne*, falls

$$(u, L^* \varphi)_{L^2} = (f, \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M).$$

**Beispiel 1.70.** Sei  $M = \mathbb{R}$  und  $L = x \cdot \frac{d}{dx}$ . Wir erinnern uns, dass  $L^* = -x \frac{d}{dx} - 1$ . Betrachte nun die Heaviside-Funktion

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Für  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  gilt dann:

$$\begin{aligned} (u, L^* \varphi)_{L^2} &= \int_0^\infty L^* \varphi \, dx \\ &= - \int_0^\infty (x \varphi)' \, dx \\ &= -[x \varphi]_0^\infty \\ &= 0 \\ &= (0, \varphi)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Gleichung  $x \frac{du}{dx} = 0$  im schwachen Sinn. Dabei ist  $u \notin \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ,  $u \notin L^1(\mathbb{R})$ , aber immerhin  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .

## 1.8. Elliptische Regularität

Wir haben soeben gesehen, dass schwache Lösungen nicht unbedingt ausreichende Regularität haben, also ausreichende Differenzierbarkeitseigenschaften haben, um auch Lösungen im klassischen Sinne zu sein. Im Rahmen der elliptischen Regularität zeigt man nun Aussagen, denenzufolge für geeignetet Differentialoperatoren alle schwachen Lösungen

der assoziierten Gleichungen bereits klassische Lösungen sind. Eine wichtige hinreichende Bedingung hierfür ist, dass der Operator elliptisch ist. Dieser Begriff, den wir hier nicht definieren wollen, gibt diesen Abschätzungen den Namen “elliptisch”. Wir betrachten in diesem Abschnitt aber nicht allgemeine elliptische Differentialoperatoren, sondern den Spezialfall von Operatoren der Form  $\Delta + h$ .

**Satz 1.71 (Globale elliptische Regularität).** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit und  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Die Funktion  $u \in L^1(M)$  löse die Gleichung  $\Delta u + hu = f$  mit  $f \in L^1(M)$  im schwachen Sinne. Dann gilt:*

- (i) *Sei  $1 < q < \infty$ . Ist  $f \in H^{k,q}(M)$  und  $u \in L^q(M)$ , so ist  $u \in H^{k+2,q}(M)$ , und die Gleichung  $\Delta u + hu = f$  gilt stark (d. h. im Sinne der Fortsetzung 1.61 von  $\Delta + h$  auf Sobolev-Räume). Ferner gibt es ein  $C > 0$ , so dass gilt:*

$$\|u\|_{H^{k+2,q}} \leq C \cdot (\|f\|_{H^{k,q}} + \|u\|_{L^q}). \quad (1.41)$$

*Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als **elliptische Abschätzungen**.*

- (ii) *Sei  $0 < \alpha < 1$ . Ist  $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$ , so ist  $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(M)$ , und die Gleichung  $\Delta u + hu = f$  gilt klassisch (d. h. im Sinne der Operation von  $\Delta + h$  auf Hölder-Räumen, siehe Lemma 1.61). Ferner gibt es ein  $C > 0$ , so dass gilt:*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k+2,\alpha}} \leq C \cdot (\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} + \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}). \quad (1.42)$$

*Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als **Schauder-Abschätzungen**.*

*Analoge Aussagen gelten auch für Differentialoperatoren vom Typ*

$$\nabla^* \nabla + h : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$$

*wobei  $h \in \mathcal{C}^\infty(\text{End}(V))$ .*

Aussage (i) ist auch ohne die zusätzliche Annahme  $u \in L^q(M)$  wahr, und in Abschätzung (1.41) kann man  $\|u\|_{L^q}$  auch durch  $\|u\|_{L^1}$  ersetzen, dies erfordert aber etwas stärkere Methoden und wird innerhalb dieses Buchs auch nicht benötigt.

*Beweisskizze.* Zur Illustration beweisen wir die Abschätzung in (i) mit  $q = 2$ ,  $k = 0$  und  $h = 0$ . Gesucht ist also eine Abschätzung der Form  $\|u\|_{H^{2,2}} \leq C \cdot (\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$ . Für die erste Ableitung finden wir:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2}^2 &= \int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle \, \text{dvol} \\ &\stackrel{(1.20)}{=} \int_M u \Delta u \, \text{dvol} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|u\|_{L^2} \cdot \|\Delta u\|_{L^2} \\
& \leq \frac{1}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) .
\end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 &= \int_M \langle \nabla^2 u, \nabla^2 u \rangle \, \text{dvol} \\
&= \int_M \langle \nabla u, \nabla^* \nabla \nabla u \rangle \, \text{dvol} \\
&= \int_M \langle \nabla u, \Delta^1 \nabla u \rangle \, \text{dvol} \\
&= \int_M \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle \, \text{dvol} + \int_M \langle \nabla u, Pu \rangle \, \text{dvol} \\
&= \int_M \Delta u \cdot \Delta u \, \text{dvol} + \int_M \langle \nabla u, Pu \rangle \, \text{dvol} .
\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir Übung 1.8 (b), derzufolge  $P := \Delta^1 \circ \nabla - \nabla \circ \Delta$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\leq 2$  ist. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 &\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|Pu\|_{L^2} \\
&\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C_1 \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|u\|_{H^{2,2}} \\
&= \|\Delta u\|_{L^2}^2 + 2 \cdot C_1 \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \|u\|_{H^{2,2}} \\
&\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + C_1^2 \cdot \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2 .
\end{aligned}$$

Aufsummieren liefert also:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{2,2}}^2 &= \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + (C_1^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2 \\
&\leq \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \frac{C_1^2 + 1}{2} (\|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2) + \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2 .
\end{aligned}$$

Subtraktion von  $\frac{1}{4} \cdot \|u\|_{H^{2,2}}^2$  und Multiplikation mit  $\frac{4}{3}$  liefert die gewünschte Abschätzung (1.41) für alle  $u \in H^{2,q}(M)$  im Spezialfall  $q = 2$ ,  $k = 0$  und  $h = 0$ .

Um die volle Aussage (i) in diesem Spezialfall zu zeigen, müssen wir aber zuerst argumentieren, dass wir überhaupt  $u \in H^{2,q}(M)$  haben. Hierzu ist die Theorie der Distributionen gut geeignet. Man zeigt zunächst, dass jede Funktion  $u \in L_{\text{loc}}^1(M; V)$  eine  $V$ -wertige Distribution definiert, wodurch auf  $\nabla^j u$  eine wohl-definierte Distribution mit Werten in  $TM^{\otimes j} \otimes V$  ist. Man definiert nun auf diesem Raum eine  $[0, \infty]$ -wertige “Norm”

$\|\cdot\|_{L^q}$  auf Schnitten von  $TM^{\otimes j} \otimes V$ , so dass  $\|u\|_{L^q}$  genau dann endlich ist, wenn es durch eine  $L^q$ -Funktion repräsentiert wird. Wir erhalten eine  $[0, \infty]$ -wertige Norm  $\|\cdot\|_{H^{k,q}}$ , so dass  $\|u\|_{H^{k,q}} < \infty$  genau dann, wenn  $u \in H^{k,q}(M)$ ; und diese Norm setzt die  $H^{k,q}$ -Norm fort. Mit Hilfe dieser Techniken folgt aus der obigen Abschnätzung auch  $u \in H^{2,q}(M)$ . Um den Satz für  $k \geq 1$  zu erhalten, zeigt man sinnvollerweise zunächst die Vektorbündelversion des Satzes für  $k = 0$  und wendet den Fall  $k = 0$  dann auf die Ableitungen  $\nabla^j u$  an.  $\square$

Einen vollständigen Beweis von Teil (i) erhält man, indem man die Ergebnisse von [27, Chapter 9, “Strong solutions”] auf riemannsche Mannigfaltigkeiten überträgt. Einen Beweis von Teil (ii) erhält man, indem man [27, Chapter 6, “Classical Solutions; the Schauder Approach”] auf riemannsche Mannigfaltigkeiten überträgt.

Im folgenden schreiben wir  $\Omega \Subset M$  als Abkürzung dafür, dass  $\Omega$  eine relativ kompakte Teilmenge von  $M$  ist; in anderen  $\bar{\Omega}$  ist kompakt.

**Satz 1.72 (Lokale elliptische Regularität).** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\Omega \Subset M$  offen und  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Sei  $1 < q < \infty$ . Die Funktion  $u \in L^1_{\text{loc}}(M)$  löse die Gleichung  $\Delta u + hu = f$  im schwachen Sinne. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $f \in H^{k,q}(M)$  und  $u \in L^q(M)$ , so ist  $u \in H^{k+2,q}(\Omega)$ , und die Gleichung  $\Delta u + hu = f$  gilt stark auf  $\Omega$  (d. h. im Sinne der Fortsetzung 1.61 von  $\Delta + h$  auf Sobolev-Räume). Ferner gibt es ein  $C > 0$ , so dass gilt:*

$$\|u\|_{H^{k+2,q}(\Omega)} \leq C \cdot \left( \|f\|_{H^{k,q}(M)} + \|u\|_{L^q(M)} \right). \quad (1.43)$$

*Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als lokale elliptische Abschätzungen.*

- (ii) *Ist  $f \in C^{k,\alpha}(M)$  und  $u \in C^{0,\alpha}(M)$ , so ist  $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$ , und die Gleichung  $\Delta u + hu = f$  gilt klassisch auf  $M$  (d. h. im Sinne der Operation von  $\Delta + h$  auf Hölder-Räumen, siehe Lemma 1.61). Ferner gibt es ein  $C > 0$ , so dass gilt:*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C \cdot \left( \|f\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^{0,\alpha}(M)} \right). \quad (1.44)$$

*Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als lokale Schauder-Abschätzungen.*

Analoge Aussagen gelten wiederum auch für Differentialoperatoren vom Typ

$$\nabla^* \nabla + h : \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$$

wobei  $h \in C^\infty(\text{End}(V))$ .

Hierbei nutzen wir die übliche Notation, dass  $\|u\|_{H^{k+2,q}(\Omega)}$  eine Kurzschreibweise für  $\|u|_\Omega\|_{H^{k+2,q}(\Omega)}$  ist. Analoge Definition machen wir für alle anderen Funktionenräume,  $L^p$ -Räume, Hölderräume, etc.

**Bemerkung 1.73.** Dieser Satz kann mittels Abschneidefunktionen aus  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ , die auf  $\Omega$  konstant  $\equiv 1$  sind, auf den globalen Fall 1.71 zurückgeführt werden.

**Übung 1.9.** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit (nicht notwendigerweise vollständig). Sei  $\Omega \Subset M$  eine offene relativ-kompakte Teilmenge. Konstruieren Sie offene  $\tilde{\Omega}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , mit

$$\Omega = \tilde{\Omega}_0 \Subset \tilde{\Omega}_1 \Subset \tilde{\Omega}_2 \Subset \dots \bigcup_{j=0}^{\infty} \tilde{\Omega}_j \Subset M.$$

**Übung 1.10.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\Omega \Subset M$  offen und  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Sei  $1 < q < \infty$ . Die Funktion  $u \in L^q(M)$  löse die Gleichung  $(\Delta + h)u = f$  im schwachen Sinne. Sei  $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$  mit  $\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M)} < \infty$ . Zeigen Sie:

$$\|u|_{\Omega}\|_{\mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C \cdot \left( \|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(M)} + \|u\|_{L^q(M)} \right). \quad (1.45)$$

*Hinweis:* Wenden Sie die lokalen elliptischen Abschätzungen und die Schauder-Abschätzungen in Kombination mit den Einbettungssätzen mehrfach an.

Aus obigen Resultaten erhalten wir auch die folgende Aussage zu Eigenwerten von  $a\Delta + h$ .

**Folgerung 1.74.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ . Jede schwache Lösung  $u \in L_{\text{loc}}^1(M)$  der (linearen) Eigenwertgleichung

$$a\Delta u + hu = \lambda u \quad (1.46)$$

ist glatt und eine Lösung im klassischen Sinn.

*Beweis.*

Wir definieren  $\tilde{h} := a^{-1}(h - \lambda)$ . Dann ist (1.46) äquivalent zu

$$\Delta u + \tilde{h}u = 0.$$

Da  $0 \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(M)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und alle  $\alpha$  gilt, erhalten wir aus Satz 1.72 (ii) die Aussage  $u|_{\Omega} \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\Omega)$  für alle  $\Omega \Subset M$  und für alle  $k$  und  $\alpha$ .  $\square$

## 1.9. Regularität subkritischer nicht-linearer partieller Differentialgleichungen

Im vorangehenden Abschnitt haben wir insbesondere gesehen, dass schwache Lösungen der linearen Eigenwertgleichung (1.46) glatt sind. Wir wollen nun ähnliche Eigenschaften für nicht-lineare Gleichungen betrachten.

Wir nehmen deswegen in diesem Abschnitt an, dass  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale (nicht notwendigerweise vollständige) riemannsche Mannigfaltigkeit ist, und wiederum  $h : M \rightarrow$

$\mathbb{R}$  glatt. Wir untersuchen schwache Lösungen  $u \in L_{\text{loc}}^{s-1}(M)$  der nicht-linearen Eigenwertgleichung

$$a\Delta u + hu = \lambda|u|^{s-2}u, \quad (1.47)$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  und  $s \in [2, \infty)$ . Im Spezialfall  $s = 2$  haben wir also den linearen Spezialfall (1.46). Wir werden im Laufe des Buches sehen, dass man Lösungen dieser Gleichung für nicht zu große  $s$ , genauer für  $s < p_c := 2n/(n-2)$ , und für alle  $a > 0$  oft ähnlich wie im linearen Fall erhalten kann. Im eigentlichen Yamabe-Problem tritt dann der Grenzfall  $s = p_c = 2n/(n-2)$  auf. Im Fall  $2 \leq s < 2n/(n-2)$  nennen wir (1.47) eine *nicht-lineare Eigenwertgleichung vom subkritischen Typ*. Im Fall  $s = 2n/(n-2)$  sagen wir, dass sie vom *kritischen Typ* ist.

Es vor allem wichtig, den Fall  $a = 1$  zu betrachten. Der Fall für allgemeine  $a > 0$  folgt dann durch einfache Reskalierung: wir erhalten Gleichung (1.47) mit beliebigem  $a > 0$  aus dem Spezialfall  $a = 1$ , indem wir  $h$  durch  $h/a$  und  $\lambda$  durch  $\lambda/a$  ersetzen. Da wir später diese sublinearen Gleichungen für  $a = 4(n-1)/(n-2)$  anwenden wollen, formulieren wir die Aussagen ab jetzt für beliebige  $a > 0$ .

Wir sagen, analog zu oben, dass  $u \in L_{\text{loc}}^{s-1}(M)$  eine *schwache Lösung* von (1.47) ist, falls für alle  $\varphi \in C_c^\infty(M)$

$$(au, \Delta\varphi)_{L^2} + (hu, \varphi)_{L^2} = (\lambda|u|^{s-2}u, \varphi)_{L^2} \quad (1.48)$$

gilt.

**Satz 1.75.** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ . Sei  $p_c = \frac{2n}{n-2}$  für  $n \geq 3$  und  $p_c = \infty$  für  $n = 2$ . Gegeben seien außerdem  $s, r \in \mathbb{R}$  mit  $2 \leq s \leq p_c$  und  $r > \frac{n}{2}(s-2)$ . Sei  $u \in L^r(M)$  eine schwache Lösung von (1.47), wobei  $h \in C^\infty(M)$ ,  $a > 0$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $u \in C^{2,\alpha}(M)$  für alle  $\alpha \in (0, 1)$ . Insbesondere gilt dann die nicht-lineare Eigenwertgleichung (1.47) sogar klassisch.*

*Ist  $M$  geschlossen und zusammenhängend und gilt  $u \geq 0$ , so haben wir außerdem:*

- (i)  $u \in C^\infty(M)$ .
- (ii)  $u \equiv 0$  oder  $u > 0$ .

*Für  $M$  geschlossen und zusammenhängend mit  $u \geq 0$  erhalten wir außerdem im folgenden Sinn eine uniforme Schauder-Abschätzung:*

- (iii) *Seien zusätzlich  $K_1, K_2 > 0$  sowie  $0 < \alpha < 1$  gegeben. Es gelte  $r > \frac{n}{2}(s_0 - 2)$ . Dann gibt es eine Konstante  $C = C(M, g, h, a, K_1, K_2, \alpha, r, s_0)$ , so dass für jede schwache Lösung  $u \in L^r(M)$  mit  $u \geq 0$  von (1.47) mit  $|\lambda| \leq K_1$ ,  $2 \leq s \leq s_0$  und  $\|u\|_{L^r} \leq K_2$  die Abschätzung  $\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$  gilt.*

*Beweis.*

- (a) Sei  $u \in L^r(M)$  eine schwache Lösung von (1.47) mit  $r > \frac{n}{2}(s_0 - 2) \geq \frac{n}{2}(s - 2)$ . (Für die Teilaussagen (i) und (ii) setze man  $s_0 := s$ .) Dann gilt im schwachen Sinn:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \underbrace{\frac{\lambda}{a} \cdot |u|^{s-2} u}_{\in L^q(M)} - \underbrace{\frac{1}{a} h \cdot u}_{\in L^r(M)} \\ &\in L^q(M) \quad \text{für } q = \frac{r}{s-1} \leq r \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $M$  geschlossen ist. Wir erhalten dann  $\Delta u \in L^q(M) \subset L^{q_0}(M)$  für  $q_0 = \frac{r}{s_0-1} \leq r$ . Der Satz über globale elliptische Regularität 1.71 liefert dann  $u \in H^{2,q_0}(M)$ . Falls  $q_0 < n/2$ , so liefert der Sobolev'sche Einbettungssatz 1.15 uns  $u \in L^{r'}(M)$  für  $r'$  mit  $2 - \frac{n}{q_0} = -\frac{n}{r'}$ . Wir haben

$$r' = n \left( n \frac{s_0 - 1}{r} - 2 \right)^{-1} = r \left( 1 + \underbrace{(s_0 - 2) - \frac{2r}{n}}_{<0} \right)^{-1} > r.$$

Im Fall  $q_0 \geq n/2$  erhalten wir  $u \in L^{r'}(M)$  für all  $r' \in [1, \infty)$ . Iteration dieses Arguments liefert dann nach endlich vielen Iterationsschritten  $u \in L^{\tilde{r}}(M)$  mit  $\tilde{r} \geq (s_0 - 1)n/2$ ,<sup>8</sup> und ein weiterer Iterationsschritt liefert dann  $u \in L^q(M)$  für alle  $q \in [r, \infty)$ . Der Satz über globale elliptische Regularität 1.71 liefert schließlich  $u \in H^{2,q}(M)$  für alle  $q \in [r, \infty)$ .

- (b) Der Sobolev'sche Einbettungssatz 1.49 liefert nun  $u \in H^{2,q}(M) \subset C^{0,\alpha}(M)$ , wobei wir  $q$  so groß wählen, dass  $2 - \frac{n}{q} \geq \alpha$ . Damit erhalten wir:<sup>9</sup>

$$\Delta u = \underbrace{\frac{\lambda}{a} \cdot |u|^{s-2} u}_{\in C^{0,\alpha}} - \underbrace{\frac{1}{a} h \cdot u}_{\in C^{0,\alpha}}.$$

Nach dem Satz über globale elliptische Regularität 1.71 ist also  $f \in C^{2,\alpha}(M)$ .

- (c) Die Abschätzung in (iii) ergibt sich aus den elliptischen und Schauder-Abschätzungen, die die Anwendungen des Satzes über elliptische Regularität 1.71 in (a) und (b) liefern.
- (d) Ist  $M$  nicht geschlossen, so ist die Argumentation bis hier ähnlich. Allerdings ist bei jeder Anwendung von elliptischen Abschätzungen und elliptischer Regularität die lokale Version, also Satz 1.72 anzuwenden. Deswegen muss nach jeder Anwendung

<sup>8</sup>Beachte, dass in jedem Iterationsschritt mit  $r$  auch die Verbesserung der Regularität wächst, da der Faktor  $1 + (s_0 - 2) - \frac{2r}{n}$  monoton in  $r$  fällt.

<sup>9</sup>Die Funktion  $x \mapsto x^{s-1}$  ist für  $s \geq 2$  auf  $[0, \infty)$  lokal Lipschitz-stetig und auf  $\text{im}(u) \subseteq \mathbb{R}$  sogar Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Die Abschätzung  $\frac{|u^{s-1}(x) - u^{s-1}(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq L \cdot \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha}$  zeigt direkt, dass die Verkettung einer Lipschitz-Funktion mit einer  $\alpha$ -Hölder-stetigen Funktion stets wieder  $\alpha$ -Hölder-stetig ist.

solcher Abschätzung der kontrollierte Bereich  $\Omega \Subset M$  etwas kleiner gewählt werden, was endlich oft getan werden muss. Zu jedem gegebenen Kompactum  $K$  kann man aber nun diese kleiner werdenden Gebiete dennoch so wählen, dass das letztendlich erhaltene Gebiet  $K$  enthält, siehe Übung 1.9.

- (e) Von nun an sei  $M$  wieder geschlossen, und zusätzlich nehmen wir an, dass  $M$  zusammenhängend ist und  $u \geq 0$  gilt. Wähle nun  $C_1 > 0$  mit  $C_1 \geq \max_{x \in M} \left( -\frac{\lambda}{a} \cdot u^{s-2}(x) + \frac{1}{a}h(x) \right)$ . Damit ist

$$(\Delta + C_1)u \geq \Delta u - \frac{\lambda}{a} \cdot u^{s-1} + \frac{1}{a}h \cdot u = 0.$$

Korollar 1.56 liefert also  $u \equiv 0$  oder  $u > 0$ . Somit ist die Aussage (ii) bereits gezeigt, und im Falle  $u \equiv 0$  gilt offensichtlich auch (i).

- (f) Sei also nun  $u > 0$ . Die Funktion  $x \mapsto x^{s-1}$  ist glatt auf  $(0, \infty)$ . Mit  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$  ist daher auch  $u^{s-1} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ . Wir erhalten:

$$\Delta u = \frac{\lambda}{a} \cdot u^{s-1} - \frac{1}{a}h \cdot u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M).$$

Der Satz über elliptische Regularität 1.71 liefert also  $u \in \mathcal{C}^{4,\alpha}(M)$ , und Iteration dieses Arguments liefert schließlich  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .  $\square$

### Bemerkungen 1.76.

- (a) Die Bedingungen  $2 \leq s \leq p_c$  und  $r > \frac{n}{2}(s-2)$  im obigen Satz sind insbesondere in den beiden folgenden Situationen erfüllt, die in unseren Anwendung eine wichtige Rolle spielen werden:
- (i)  $2 \leq r = s < p_c$  (der subkritische Fall mit a priori bekannter  $L^s$ -Regularität),
  - (ii)  $s = p_c < r$  (der kritische Fall mit a priori bekannter „superkritischer“ Regularität, d. h.  $u \in L^r$  mit  $r > p_c$ ).
- (b) Die Voraussetzung von Satz 1.75 sind für  $r = s = p_c$  nicht mehr erfüllt. Diesen Fall betrachten wir im folgenden Abschnitt 1.10, insbesondere in Trudingers Lemma 1.78.
- (c) Selbst im Fall, dass  $M$  geschlossen ist, können wir mit unseren Methoden nicht ausschließen, dass die  $\mathcal{C}^k$ -Abschätzungen mit  $k \geq 4$  zusätzlich zu den in (iii) genannten Größen von  $\min u$  abhängen. Für  $\mathcal{C}^{3,\alpha}$ -Abschätzungen mit  $\alpha \leq 4/(n-2)$  (bzw.  $\alpha < 1$  für  $n = 2$  oder  $n = 3$ ) kann man die Methoden einfach erweitern.
- (d) Die Aussage in Satz 1.75 ist uniform im folgenden Sinn. Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa, D, i \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sei  $\mathcal{M}(n, \kappa, D, i)$  die Klasse<sup>10</sup> aller geschlossenen  $n$ -dimensionalen riemannschen

<sup>10</sup>Wir müssten hier eigentlich etwas genauer sein, damit dies eine Klasse im Sinne der Mengenlehre ist. Man arbeitet am besten mit der „Menge“ aller Isometrie-Klassen derartiger riemannscher Mannigfaltigkeiten. Es ist aber auch dann nicht a priori klar, ob dies eine Menge oder eine Klasse ist. Eine elegante Möglichkeit, dieses subtile mengentheoretische Problem zu lösen ist, ist alle Mannigfaltigkeiten als Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , zu repräsentieren. In diesem Sinn ist der Begriff „Menge aller Isometrieklassen riemannscher Mannigfaltigkeiten“ wohldefiniert.

Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung  $K$  beschränkt durch  $|K| \leq \kappa$ , mit Durchmesser  $\text{diam}(M, g)$  beschränkt durch  $\text{diam}(M, g) \leq D$  und Injektivitätsradius nach unten positiv beschränkt durch  $\text{inj}(M, g) \geq i$ .

Dann kann man für alle  $(M, g) \in \mathcal{M}(n, \kappa, D, i)$  dieselbe Konstante  $C$  wählen. Man zeigt dies entweder, indem man alle zu Grunde liegenden Abschätzungen uniform in diesen Größen durchführt. Einen alternativen Beweis erhält man, indem man eine Folge  $(M_j, g_j)$  in  $\mathcal{M}(n, \kappa, D, i)$  hernimmt, für die es kein gemeinsames  $C$  gibt. Sei  $C_j$  die optimale Konstante  $C$  für  $(M_j, g_j)$ . Man erhält dann mit Cheeger–Gromov-Kompaktheit nach Übergang zu einer Teilfolge eine geschlossene Mannigfaltigkeit  $M_\infty$  mit einer  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ -Metrik  $g_\infty$ , so dass  $(M_j, g_j)$  in der  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ -Version der Gromov–Hausdorff-Topologie gegen  $(M_\infty, g_\infty)$  konvergiert. Man kann nun zeigen, dass die Abschätzung in Satz 1.75 (iii) für ein  $C = C_\infty$  auch für  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ -Metriken  $g_\infty$  erhalten werden kann. Zudem zeigt man, dass die optimalen Konstanten  $C_j$  und  $C_\infty$  die Ungleichung  $\limsup_{j \rightarrow \infty} C_j \leq C_\infty$  erfüllen. Dies ergibt dann einen Widerspruch.

**Bemerkung 1.77.** Satz 1.75 gilt auch in einer lokalen Version. Hierzu sei  $M$  eine zusammenhängende (nicht notwendigerweise vollständige) riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\Omega \Subset M$  ein Gebiet.<sup>11</sup> Dann gelten die Aussagen von (i) und (ii) in Satz 1.75 unverändert weiter, und Teil (iii) muss dann zu

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(M, g, h, a, \Omega, K_1, K_2, \alpha, r, s_0) \quad (1.49)$$

modifiziert werden. Die lokale Version kann analog zu Satz 1.75 mit Hilfe der lokalen Regularitäts-Aussagen (Satz 1.72) und lokalen Sobolev’schen Einbettungen (Bemerkung 1.53) bewiesen werden. Um in jedem Abschätzungsschritt und Einbettungsschritt das Gebiet verkleinern zu können, nutzen wir Übung 1.9. Ist  $g_j$  eine Familie von riemannschen Metriken, die auf allen Kompakta gegen  $g$  in der  $\mathcal{C}^\infty$ -Topologie konvergiert, dann kann man die Konstante  $C$  uniform in  $j$  wählen.

## 1.10. Von schwachen zu starken Lösungen bei kritischen Nicht-Linearitäten

Wir haben in Folgerung 1.74 gesehen, dass schwache Lösung der linearen Eigenwertgleichung des Operators  $a\Delta + h$  starke und letztendlich glatte und somit klassische Lösungen sind. Wir haben gesehen, dass viele dieser Eigenschaften für nicht-lineare Eigenwertgleichung mit subkritischen Nicht-Linearitäten auch gültig sind. Wir wollen nun kritischer Nicht-Linearitäten untersuchen.

Wir haben in Satz 1.75 bereits gesehen, dass schwache nicht-negative Lösungen von

$$a\Delta u + hu = \lambda u^{p_c-1}$$

mit  $u \in L^r(M)$ ,  $r > p_c := 2n/(n-2)$  starke glatte Lösungen sind. Wir zeigen nun, dass diese Folgerung auch noch für die a priori schwächere Voraussetzung  $u \in L^{p_c}(M)$  richtig ist.

<sup>11</sup>Gebiete sind per definitionem offene, zusammenhängende und nicht-leere Teilmengen.

**Lemma 1.78 (Trudinger [59]).** *Sei wieder  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ ,  $p_c = 2n/(n-2)$  und  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sei  $u \in L^{p_c}$ ,  $u \geq 0$  eine schwache Lösung von*

$$a \Delta u + hu = \lambda u^{p_c-1} \quad (1.50)$$

*mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $u \in L^r(M)$  für ein  $r > p_c$ .*

*Beweis.*

Im Sinne einer einfachen Notation schreiben wir  $p = p_c$  im folgenden Beweis. Wir fixieren eine Zahl  $q \in (1, \frac{n}{n-2}]$ . Sei  $\ell > 0$  eine reelle Zahl, die wir im Beweis letztendlich gegen  $+\infty$  konvergieren lassen. Setze  $\beta := 2q - 1$ .

Wir definieren die folgenden Funktionen für  $x \in \mathbb{R}$ :

$$G_\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x^\beta & \text{falls } x \in [0, \ell) \\ \ell^{q-1}(q\ell^{q-1}x - (q-1)\ell^q) & \text{falls } x \geq \ell \end{cases}$$

und

$$F_\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x^q & \text{falls } x \in [0, \ell) \\ q\ell^{q-1}x - (q-1)\ell^q & \text{falls } x \geq \ell \end{cases}$$

Beide Funktionen sind Lipschitz-stetig (mit einer globalen Lipschitz-Konstante) und stückweise stetig differenzierbar.

Man überprüft leicht für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(F'_\ell(x))^2 \leq qG'_\ell(x), \quad (1.51)$$

$$(F_\ell(x))^2 \geq xG_\ell(x) \quad (1.52)$$

und

$$xG'_\ell(x) \leq \beta G_\ell(x). \quad (1.53)$$

Aus<sup>12</sup>  $u \in L^p(M)$  folgt  $u^{p-1} \in L^{p/(p-1)}(M) = L^{p^*}(M)$ , wobei  $p^* = 2n/(n+2)$ . Mit elliptischer Regularität folgt analog zu Beweisteil (a) von Satz 1.75 dann  $u \in H^{2,p^*}(M)$  und mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz dann  $u \in H^{1,2}(M)$ . Da  $F_\ell$  und  $G_\ell$  uniform Lipschitz-stetig sind, erhalten wir auch  $F_\ell(u), G_\ell(u) \in H^{1,2}(M)$ .

Sei nun  $x_0 \in M$  und  $\eta \in \mathcal{C}^2(M)$ ,  $\eta : M \rightarrow [0, 1]$ ,  $\text{supp } \eta \in B_{2\delta}(x_0)$ , wobei  $\delta > 0$  eine später zu fixierende kleine Zahl sei. Es gelte weiter  $\eta \equiv 1$  auf  $B_\delta(x_0)$ . Wir multiplizieren (1.50) mit  $\eta^2 G_\ell(u)$  und integrieren über  $M$ . Da die Träger von  $u$  und  $G_\ell(u)$  übereinstimmen, erhalten wir:

<sup>12</sup>Im Beweis ist noch überall  $f$  durch  $u$  zu ersetzen!



$$\begin{aligned}
a \int_M \langle \nabla u, \nabla (\eta^2 G_\ell(u)) \rangle \, \text{dvol}^g + \int_M h^g u \eta^2 G_\ell(u) \, \text{dvol}^g \\
= \lambda \int_M u^{p-1} \eta^2 G_\ell(u) \, \text{dvol}^g.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Im folgenden sei  $C$  eine positive Konstante, die nur von  $\eta, q, \beta, \delta$ . nicht aber von  $\ell$  abhängen darf. Die Konstante  $C$  darf von Zeile zu Zeile verschieden sein.

Wir behandeln nun den ersten Summanden der linken Seite von (1.54). Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_M \langle \nabla u, \nabla (\eta^2 G_\ell(u)) \rangle \, \text{dvol}^g \\
&= \int_M G_\ell(u) \langle \nabla u, \nabla \eta^2 \rangle \, \text{dvol}^g + \int_M G'_\ell(u) \eta^2 |\nabla u|^2 \, \text{dvol}^g \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_M G_\ell(u) u \underbrace{\Delta(\eta^2)}_{\geq -C} \, \text{dvol}^g - 2 \int_M u \underbrace{G'_\ell(u) \eta \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle}_{G'_\ell(u) \langle \eta \nabla u, u \nabla \eta \rangle} \, \text{dvol}^g + \int_M G'_\ell(u) \eta^2 |\nabla u|^2 \, \text{dvol}^g,
\end{aligned}$$

wobei wir die Gleichung  $(*)$  durch partielle Integration erhalten unter Nutzung von  $\nabla G_\ell(u) = G'_\ell(u) \nabla u$ . Aus  $0 \leq \frac{1}{2} \langle 2X - Y, 2X - Y \rangle$  folgt  $2 \langle X, Y \rangle \leq 2 \|X\|^2 + \frac{1}{2} \|Y\|^2$ . Für  $X := u \nabla \eta$  und  $Y := \eta \nabla u$  rechnen wir dann weiter:

$$\begin{aligned}
& \int_M \langle \nabla u, \nabla (\eta^2 G_\ell(u)) \rangle \, \text{dvol}^g \\
&\geq -C \int_M u G_\ell(u) \, \text{dvol}^g - 2 \int_M \underbrace{u^2 G'_\ell(u)}_{\leq u \beta G_\ell(u)} |\nabla \eta|^2 \, \text{dvol}^g + \frac{1}{2} \int_M G'_\ell(u) \eta^2 |\nabla u|^2 \, \text{dvol}^g,
\end{aligned}$$

wobei wir (1.53) genutzt haben. Mit (1.51) und (1.52) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int_M \langle \nabla u, \nabla (\eta^2 G_\ell(u)) \rangle \, \text{dvol}^g \\
&\geq -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, \text{dvol}^g + \frac{1}{2q} \int_M (F'_\ell(u))^2 \eta^2 |\nabla u|^2 \, \text{dvol}^g \\
&= -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, \text{dvol}^g + \frac{1}{2q} \int_M \eta^2 |\nabla F_\ell(u)|^2 \, \text{dvol}^g \\
&\stackrel{(+)}{\geq} -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, \text{dvol}^g + \frac{1}{4q} \int_M |\nabla(\eta F_\ell(u))|^2 \, \text{dvol}^g - \frac{1}{2q} \int_M \underbrace{|\nabla \eta|^2}_{\leq C} (F_\ell(u))^2 \, \text{dvol}^g \\
&\geq -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, \text{dvol}^g + \frac{1}{4q} \int_M |\nabla(\eta F_\ell(u))|^2 \, \text{dvol}^g.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Hierbei haben wir in  $(+)$  genutzt, dass für  $\eta \in C^\infty(M)$  und  $\psi \in H^{1,2}(M)$  gilt:

$$\int_M |\nabla(\eta \psi)|^2 \, \text{dvol}^g = \|\psi \nabla \eta + \eta \nabla \psi\|_{L^2}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \|\psi \nabla \eta\|_{L^2}^2 + \|\eta \nabla \psi\|_{L^2}^2 + 2 \int_M \langle \psi \nabla \eta, \eta \nabla \psi \rangle \, d\text{vol}^g \\
&= 2\|\psi \nabla \eta\|_{L^2}^2 + 2\|\eta \nabla \psi\|_{L^2}^2 - \|\psi \nabla \eta - \eta \nabla \psi\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\|\psi \nabla \eta\|_{L^2}^2 + 2\|\eta \nabla \psi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Auf Grund des Sobolev'schen Einbettungssatzes für  $H_1^2(M) \rightarrow L^p(M)$  gibt es eine Konstante  $\sigma^M > 0$ , die nur von  $(M, g)$  abhängt, so dass

$$\int_M |\nabla(\eta F_\ell(u))|^2 \, d\text{vol}^g \geq \frac{1}{\sigma^M} \underbrace{\left( \int_M (\eta F_\ell(u))^p \, d\text{vol}^g \right)^{\frac{2}{p}}}_{\|\eta F_\ell(u)\|_{L^p}^2} - \int_M (\eta F_\ell(u))^2 \, d\text{vol}^g.$$

Zusammen mit (1.55) erhalten wir für den ersten Summanden der linken Seite von (1.54)

$$a \int_M \langle \nabla u, \nabla (\eta^2 G_\ell(u)) \rangle \, d\text{vol}^g \geq -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, d\text{vol}^g + \frac{a \|\eta F_\ell(u)\|_{L^p}^2}{4q\sigma^M} \quad (1.56)$$

Nach (1.52) bekommen wir nun für den zweiten Summanden

$$\int_M hu\eta^2 G_\ell(u) \, d\text{vol}^g \geq -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, d\text{vol}^g.$$

Mit (1.54) ergibt sich also

$$\lambda \int_M u^{p-1} \eta^2 G_\ell(u) \, d\text{vol}^g \geq -C \int_M (F_\ell(u))^2 \, d\text{vol}^g + \frac{a \|\eta F_\ell(u)\|_{L^p}^2}{4q\sigma^M}. \quad (1.57)$$

Wir setzen nun  $\lambda_+ := \max\{\lambda, 0\}$ . Dann wählen wir das noch zu bestimmende  $\delta > 0$  so klein, dass

$$\lambda_+ \left( \int_{B_{2\delta}(x_0)} u^p \, d\text{vol}^g \right)^{2/n} \leq \frac{a}{8q\sigma^M}.$$

Die Relation (1.52) und die Hölder-Ungleichung führen dann zu

$$\begin{aligned}
\lambda \int_M u^{p-1} \eta^2 G_\ell(u) \, d\text{vol}^g &\leq \lambda_+ \int_{B_{2\delta}(x_0)} u^{p-2} \eta^2 (F_\ell(u))^2 \, d\text{vol}^g \\
&\leq \lambda_+ \underbrace{\|u^{4/(n-2)}\|_{L^{(p/2)^*}(B_{2\delta}(x_0))}}_{\left( \int_{B_{2\delta}(x_0)} u^p \, d\text{vol}^g \right)^{2/n}} \|(\eta F_\ell(u))^2\|_{L^{p/2}} \\
&\leq \frac{a}{8q\sigma^M} \|\eta F_\ell(u)\|_{L^p}^2.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (1.57) bekommen wir also

$$\frac{a}{8q\sigma^M} \|\eta F_\ell(u)\|_{L^p}^2 \leq C \int_M (F_\ell(u))^2 \, d\text{vol}^g.$$

Nach Annahme gilt  $u \in L^p(M)$ . Wegen  $2q \leq p$  und da  $C$  unabhängig von  $\ell$  ist, ist die rechte Seite dieser Ungleichung beschränkt für  $\ell \rightarrow +\infty$ . Wir erhalten nach monotoner Konvergenz, denn  $F_\ell$  ist eine in  $\ell$  monoton wachsende Funktionenfolge:

$$\int_{B_\delta(x_0)} \underbrace{\eta^p}_{=1} \underbrace{F_\ell(u)^p}_{=u^p} \, d\text{vol}^g \leq \int_M \eta^p F_\ell(u)^p \, d\text{vol}^g = \limsup_{\ell \rightarrow +\infty} \int_M (\eta F_\ell(u))^p \, d\text{vol}^g < +\infty.$$

Dies zeigt  $u \in L^{qp}(B_\delta(x_0))$ . Da dies für alle  $x_0 \in M$  gilt, können wir daraus durch ein einfaches Kompaktheitsargument schließen, dass  $u \in L^r(M)$  für  $r := qp > p_c$ .  $\square$

**Bemerkung 1.79.** Die Standard-Blasen  $u_\alpha$ , die wir Abschnitt 2.3 kennenlernen werden, sind für  $h \equiv 0$  und  $a = 4\frac{n-1}{n-2}$  Lösungen von (1.50) mit  $\lambda = n(n-1)$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Die  $L^{p_c}$ -Norm ist beschränkt und unabhängig von  $\alpha$ , denn  $\|u_\alpha\|_{L^{p_c}}^{p_c} = \omega_n$ . Andererseits gilt

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \|u_\alpha\|_{L^r} = \infty$$

für alle  $r > p_c$ .

Wir erhalten also in Lemma 1.78 zwar Regularität in  $L^r$ , aber das obige Beispiel mit  $u_\alpha$ ,  $\alpha \searrow 0$ , zeigt, dass keine zu Satz 1.75 (iii) analogen Abschätzungen gelten.

## 1.11. Green-Funktionen

Sei  $(M, g)$  eine geschlossene, riemannsche Mannigfaltigkeit. Im Folgenden schreiben wir zur Abkürzung  $H^k(M) := H^{k,2}(M)$ , also insbesondere  $H^0(M) := L^2(M)$ .

**Lemma 1.80.** Sei  $a > 0$  konstant und  $h \in C^\infty(M)$ . Wir definieren den Differentialoperator  $L = a\Delta + h$  und wähle  $c < \min_{x \in M} h(x)$ . Dann ist  $L - c : H^2(M) \rightarrow L^2(M)$  ein Isomorphismus von Hilberträumen.

*Beweis.*

(a)  $L - c$  ist ein Differentialoperator 2. Ordnung, nach Lemma 1.61 (b) ist also  $L - c : H^2(M) \rightarrow L^2(M)$  beschränkt.

(b)  $L - c$  ist injektiv: Sei nämlich  $u \in H^2(M)$  mit  $(L - c)u = 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= ((L - c)u, u)_{L^2} \\ &= \int_M u \cdot (a\Delta + h - c)u \, d\text{vol} \\ &= \int_M \underbrace{a|\nabla u|^2}_{\geq 0} + \underbrace{(h - c)}_{> 0} \cdot u^2 \, d\text{vol} \\ \implies u &= 0. \end{aligned}$$

- (c) Sei nun  $u \in L^2(M)$  mit  $u \perp \operatorname{im}(L - c)$ , d. h. für jedes  $\varphi \in H^2(M)$  – insbesondere für jedes  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$  – gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M u \cdot (L - c)\varphi \, \mathrm{dvol} \\ &= (u, (L - c)\varphi)_{L^2}, \end{aligned}$$

d. h. die Gleichung  $(L - c)u = 0$  gilt im schwachen Sinn. Nach dem Satz über elliptische Regularität (Theorem 1.71) ist  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , und die Gleichung  $(L - c)u = 0$  gilt im klassischen Sinn. Nach (b) ist dann  $u = 0$ . Folglich ist  $(\operatorname{im}(L - c))^\perp = \{0\}$  und damit  $\overline{\operatorname{im}(L - c)} = L^2(M)$ , d. h.  $\operatorname{im}(L - c)$  liegt in  $L^2(M)$  dicht.

- (d) Sei nun  $\psi \in L^2(M)$  beliebig. Gemäß (c) wähle  $\psi_j := (L - c)u_j$  mit  $\psi_j \xrightarrow{L^2(M)} \psi$ . Insbesondere ist  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(M)$ . Wegen der elliptischen Abschätzungen (1.41) ist dann  $u_j$  eine Cauchy-Folge in  $H^2(M)$ . Für den Grenzwert  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j =: u \in H^2(M)$  finden wir:

$$\begin{aligned} (L - c)u &= (L - c) \lim_{j \rightarrow \infty} u_j \\ &\stackrel{(a)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} (L - c)u_j \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j \\ &= \psi. \end{aligned}$$

Somit ist  $L - c$  surjektiv.

- (e) Die Inverse  $(L - c)^{-1} : L^2(M) \rightarrow H^2(M)$  ist beschränkt nach dem Satz B.2 von der offenen Abbildung bzw. aufgrund der elliptischen Abschätzungen (1.41).  $\square$

Wir haben also mit dem Satz von Rellich-Kondrakhov 1.29:

$$L^2(M) \xrightarrow{(L-c)^{-1}} H^2(M) \xrightarrow{\text{kompakt}} L^2(M).$$

Nach Bemerkung 1.24 ist daher  $(L - c)^{-1} : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  ein kompakter Operator. Da  $L - c : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  formal selbstadjungiert, beschränkt und abgeschlossen ist, ist er selbstadjungiert. Der Spektralsatz B.1 über kompakte selbstadjungierte Operatoren auf einem separablen unendlich-dimensionalen Hilbertraum liefert:  $\operatorname{spec}(L - c)^{-1} \setminus \{0\}$  ist eine diskrete und beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , und aus (reellen) Eigenwerten endlicher Multiplizität. Die zugehörigen Eigenräume stehen paarweise senkrecht aufeinander. Ferner gibt es eine vollständige Hilbertraum-Basis von  $L^2(M)$ , bestehend aus Eigenfunktionen von  $(L - c)^{-1}$ . Ferner stehen Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht zueinander. Die Eigenräume von  $(L - c)^{-1}$  spannen einen dichten Unterraum von  $L^2(M)$  auf.

Für den Operator  $L - c$  wissen wir mehr. Da er injektiv ist, ist 0 kein Eigenwert. Da alle Eigenräume endliche Multiplizität haben, aber da andererseits  $L^2(M)$  unendlich-dimensional ist, muss es unendlich viele Eigenwerte geben, die sich in 0 häufen. Deswegen ist 0 im Spektrum, aber kein Eigenwert.

Ist  $u$  eine Eigenfunktion von  $(L - c)^{-1}$  zum Eigenwert  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so ist  $u$  ebenfalls eine Eigenfunktion von  $L$  zum Eigenwert  $\lambda := c + \frac{1}{\nu}$ , denn

$$\begin{aligned} (L - c)^{-1}u = \nu u &\Leftrightarrow \frac{1}{\nu}u = (L - c)u \\ &\Leftrightarrow Lu = \left(c + \frac{1}{\nu}\right)u. \end{aligned}$$

- Aus obigen Überlegungen folgt, dass alle Eigenwerte von  $L$  reell sind und endliche Multiplizität haben. Die Eigenräume sind paarweise orthogonal und spannen einen dichten Unterraum von  $L^2(M)$  auf. Die Eigenwerte bilden eine diskrete Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .
- Das Spektrum von  $L$  ist nach unten beschränkt, denn

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \|u\|_{L^2}^2 &= (Lu, u)_{L^2} \\ &= \int_M u \cdot Lu \, \text{dvol} \\ &= \int_M u \cdot (a\Delta u + h) \, \text{dvol} \\ &= \int_M a|\nabla u|^2 + h \cdot u^2 \\ &\geq (\min h) \cdot \|u\|_{L^2}^2 \\ \implies \lambda &\geq \min h. \end{aligned}$$

- Somit konvergieren die Eigenwerte von  $L$  gegen  $+\infty$ .
- Somit gibt es eine vollständige Orthonormalbasis von  $L^2(M)$ , bestehend aus Eigenfunktionen von  $L$ .
- Nach dem Satz 1.71 über elliptische Regularität sind alle Eigenfunktionen von  $L$  glatt.

**Beispiel 1.81.** Sei  $(M, g) = (T^n, g) = (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, g)$  ein flacher Torus, und sei

$$L = \Delta = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2}.$$

Für  $k \in \mathbb{Z}^n$  setze  $f_k(x) = e^{2\pi i \langle x, k \rangle}$ . Für jedes  $z \in \mathbb{Z}^n$  und jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $f_k(x + z) = f_k(x)$ , daher steigt  $f_k$  zu einer glatten Funktion auf dem Quotienten  $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  ab, die wir ebenfalls mit  $f_k$  bezeichnen.

Sei  $H^\ell(M; \mathbb{C}) := H^\ell(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_0$  die Komplexifizierung von  $H^\ell(M)$ , das heißt die Elemente von  $H^\ell(M; \mathbb{C})$  sind komplexwertige Funktionen, deren Real- und Imaginärteil in  $H^\ell(M)$  liegen. Man kann zeigen, dass  $\{f_k \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$  eine komplexe Basis (im Sinne von Hilbert-Räumen) von  $H^\ell(M; \mathbb{C})$  ist. Wir erweitern den Laplace-Operator  $\Delta$  komplex-linear zu einem Operator  $\Delta : H^2(M; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(M; \mathbb{C})$ .

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} f_k &= 2\pi i k_j \cdot f_k \\ \implies \Delta f_k &= -(2\pi i)^2 \sum_{j=1}^n k_j^2 \cdot f_k = (2\pi)^2 |k|^2 \cdot f_k. \end{aligned}$$

Wir haben Eigenvektoren von  $\Delta$  gefunden. Der Satz von Stone–Weierstraß impliziert, dass diese Eigenvektoren einen dichten Unterraum aufspannen. Daher ist

$$\text{spec}(\Delta : H^2(M) \rightarrow L^2(M)) = \text{spec}(\Delta : H^2(M; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(M; \mathbb{C})) = \{(2\pi)^2 |k|^2 \mid k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Die Entwicklung einer Funktion  $g \in \mathcal{C}^\infty(T^n)$  in der Basis  $\{f_k \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$  entspricht genau der Fourier-Reihenentwicklung periodischer Funktion  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 1.82.** Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$H^{-k}(M) := (H^k(M))^* \tag{1.58}$$

$$= \left\{ \alpha : H^k(M) \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ beschränkt, linear} \right\}. \tag{1.59}$$

Sei  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  das  $L^2$ -Skalarprodukt auf  $L^2(M)$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz ist die Abbildung

$$\begin{aligned} L^2(M) &\longrightarrow L^2(M)^* \\ u &\mapsto (u, \cdot)_{L^2}. \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, den wir nutzen, um  $L^2(M) = H^0(M)$  mit seinem Dualraum  $(L^2(M))^*$  zu identifizieren. Deswegen führt obige Definition auch für  $k = 0$  zu keinen Zweideutigkeiten.

Für  $k > \ell$  ist  $H^k(M) \subset H^\ell(M)$  als dichter Unterraum. Die zu dieser Inklusion  $\iota$  adjungierte Abbildung ist eine Abbildung  $\iota^* : H^{-\ell}(M) \rightarrow H^{-k}(M)$  die durch Restriktion auf den Unterraum  $H^k(M)$  gegeben ist. Die Abbildung  $\iota^*$  ist injektiv: denn angenommen  $\alpha \in H^{-\ell}(M) = (H^\ell(M))^*$  ist im Kern  $\iota^*$ , dann verschwindet  $\alpha$  auf dem dichten Unterraum  $H^k(M)$  und mit der Stetigkeit von  $\alpha$  folgt  $\alpha = 0$ . Wir identifizieren  $\alpha$  nun mit  $\iota^* \alpha$ , also  $H^{-\ell}(M) \subset H^{-k}(M)$ . Der Raum  $H^{-\ell}(M)$  ist dicht in  $H^{-k}(M)$ : denn sonst gäbe es ein  $F \in (H^{-k}(M))^* \cong H^k(M)$ ,  $F \neq 0$  mit  $0 = F \circ \iota^* = \iota(F)$ ; dies würde der Injektivität von  $H^k(M) \subset H^\ell(M)$  widersprechen.

Wir haben daher eine unendliche Kette von Inklusionen:

$$\dots \supset H^{-2}(M) \supset H^{-1}(M) \supset H^0(M) \supset H^1(M) \supset H^2(M) \supset \dots$$

Für alle  $k > \ell$  ist  $H^k(M)$  ein echter und dichter Teilraum von  $H^\ell(M)$ .

Die kanonische Paarung schreiben wir als:

$$\begin{aligned} H^{-k}(M) \times H^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha(u) =: (\alpha, u)_{\text{can}, k}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Mit der Identifikation  $L^2(M) = (L^2(M))^*$  gilt  $(\cdot, \cdot)_{L^2} = (\cdot, \cdot)_{\text{can}, 0}$ . Für  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  stimmen  $(\cdot, \cdot)_{\text{can}, k}$  und  $(\cdot, \cdot)_{\text{can}, \ell}$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein, d. h. im Fall  $k > \ell$  gilt

$$(\alpha, u)_{\text{can}, k} = (\alpha, u)_{\text{can}, \ell} \quad \forall \alpha \in H^{-\ell}(M), \forall u \in H^k(M).$$

Wir können also der Einfachheit halber  $(\cdot, \cdot)$  für all die Skalarprodukte  $(\cdot, \cdot)_{\text{can}, k}$  und  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  schreiben. Das Skalarprodukt auf  $H^k(M)$ ,  $k > 0$  definiert ein Skalarprodukt auf dem Dualraum  $H^{-k}(M)$ , das wir  *$H^{-k}$ -Skalarprodukt* nennen und das auf  $L^2(M)$  nicht mit  $(\cdot, \cdot)$  übereinstimmt. Die zugehörige Norm wird  *$H^{-k}$ -Sobolev-Norm*  $\|\cdot\|_{H^{-k}}$  genannt.

Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz 1.15 gilt:

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M) = \mathcal{C}^\infty(M).$$

**Definition 1.83.** Wir schreiben die Vereinigung als

$$H^{-\infty}(M) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M) \quad (1.61)$$

**Bemerkung 1.84.** Für geschlossene  $M$  kann man zeigen, dass  $H^{-\infty}(M) = \mathcal{D}'(M)$  gilt, wobei  $\mathcal{D}'(M)$  der schon mehrfach erwähnte Raum der Distributionen auf  $M$  ist. Die Elemente aus  $\mathcal{D}'(M)$  heißen *Distributionen* auf  $M$ . Die Notation  $\mathcal{D}'(M)$  kommt davon, dass man in der Distributionentheorie  $\mathcal{D}(M) := \mathcal{C}_c^\infty(M)$  definiert, also für geschlossene Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ . Dann ist  $\mathcal{D}'(M)$  der dazu duale topologische Vektorraum.

Wir wollen den Isomorphismus etwas genauer beschreiben. Sei  $u \in H^{-\infty}(M)$ , also  $u \in H^{-k}(M) = (H^k(M))^*$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Die Verkettung

$$\mathcal{C}_c^\infty(M) = \mathcal{D}(M) \hookrightarrow H^k(M) \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

definiert eine lineare Abbildung  $\hat{u}$ , also ein Element des algebraischen Dualraums  $\mathcal{D}(M)$ . Die oben erwähnte Gleichheit  $H^{-\infty}(M) = \mathcal{D}'(M)$  besagt genauer formuliert, dass nach

geeigneter Topologisierung  $\hat{u}$  eine stetige lineare Abbildung ist, und dass die Abbildung  $u \mapsto \hat{u}$  ein Isomorphismus von topologischen Vektorräumen von  $H^{-\infty}(M)$  nach  $\mathcal{D}'(M)$  ist.

**Beispiel 1.85.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $p \in M$  beliebig. Für  $f \in \mathcal{C}^0(M)$  setze  $(\delta_p, f) := f(p)$ . Die Auswertung in  $p$  ist beschränkt, denn  $|(\delta_p, f)| = |f(p)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0(M)}$ . Für  $k > \frac{n}{2}$  ist nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz die Verkettung

$$H^k(M) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(M) \xrightarrow{\delta_p} \mathbb{R}$$

eine stetige lineare Abbildung, d. h.  $\delta_p \in H^{-k}(M)$ .

**Bemerkung 1.86.** Analog zum Beweis von Lemma 1.80 zeigt man: Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  ist

$$(L + c)^j : H^{2j}(M) \rightarrow H^0(M)$$

ein Isomorphismus.

Man kann diesen Isomorphismus auch induktiv konstruieren, denn nach Lemma 1.61 haben wir für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  wohldefinierte Abbildungen

$$\begin{aligned} (L + c) : H^{k+2}(M) &\rightarrow H^k(M) \\ \text{und} \quad (L + c)^* : H^{-k}(M) &\rightarrow H^{-k-2}(M). \end{aligned}$$

die auf Grund der Regularitätstheorie Isomorphismen sind.

Setze nun

$$X_L := \{\text{endliche Linearkombinationen von Eigenfunktionen von } L\} \subset \mathcal{C}^\infty(M).$$

Wir haben gesehen, dass  $X_L$  dicht in  $L^2(M)$  liegt. Wegen  $(L + c)(X_L) = X_L = (L + c)^{-1}(X_L)$  und da Isomorphismen dichte Unterräume auf dichte Unterräume abbilden, liegt  $X_L \subset H^{2j}(M)$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  dicht. Sei  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine vollständige Orthonormalbasis von  $L^2(M)$ , bestehend aus Eigenfunktionen von  $L$ . Für ein  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$  sei  $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot f_i$  die Entwicklung in dieser Basis. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} ((L + c)^* f_j, \varphi)_{L^2} &= (f_j, (L + c) \varphi)_{L^2} \\ &= \left( f_j, \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot f_i \right)_{L^2} \\ &= (f_j, a_j \cdot (\lambda_j + c) \cdot f_j)_{L^2} \\ &= (\lambda_j + c) \cdot (f_j, a_j \cdot f_j)_{L^2} \\ &= \left( (\lambda_j + c) \cdot f_j, \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot f_i \right)_{L^2} \\ &= ((\lambda_j + c) \cdot f_j, \varphi)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit ist  $(L + c)^* f_j = (\lambda_j + a) \cdot f_j$ , und insbesondere ist  $(L + c)^*(X_L) = X_L$ . Damit liegt  $X_L$  auch in  $H^{-2j}(M)$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  dicht. Insbesondere ist also  $\mathcal{C}^\infty(M) \subset H^{2j}(M)$  dicht für alle  $j \in \mathbb{Z}$ .



**Übung 1.11.** Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, g_{\text{flach}})$  der flache Standard-Torus. Für  $k > \frac{n}{2}$  ist  $\delta_0 \in H^{-k}(M)$ . Berechnen Sie die Entwicklung von  $\delta_0$  in der Basis  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  aus Beispiel 1.81.

**Definition 1.87.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $L = a\Delta + h$  mit  $a > 0$  konstant und  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , und sei  $p \in M$  beliebig. Dann heißt  $\Gamma \in H^{-\infty}(M)$  eine *Green-Funktion von  $L$  an der Stelle  $p$* , falls gilt:

$$L^*(\Gamma) = \delta_p. \quad (1.62)$$

**Bemerkungen 1.88.**

- (a) Gleichung (1.62) ist laut den obigen Definition so zu lesen: es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\Gamma \in H^{-k}(M)$  (und somit  $L^*(\Gamma) \in H^{-k-2}(M)$  und für alle  $\varphi \in H^{k+2}(M)$  gilt

$$(\Gamma, L\varphi) = (L^*\Gamma, \varphi) = (\delta_p, \varphi) = \varphi(p). \quad (1.63)$$

Da  $\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \|\varphi\|_{H^{k+2,p}} < \infty\}$  dicht  $H^{k+2,p}(M)$  liegt, reicht es (1.63) für alle  $\varphi$  in diesem Raum zu testen. Ist  $\mathcal{C}_c^\infty(M)$  dicht in  $H^{k+2}(M)$ , dann reicht auch das Testen mit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ .

- (b) Falls  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M \setminus \{p\})$ , so ist

$$\begin{aligned} (\Gamma, L\varphi) &= (L^*\Gamma, \varphi) \\ &= (\delta_p, \varphi) \\ &= \varphi(p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d. h.  $\Gamma$  löst die Gleichung  $L^*\Gamma = 0$  im schwachen Sinn auf  $M \setminus \{p\}$ . Nach dem Satz über elliptische Regularität 1.71 ist dann bereits  $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(M \setminus \{p\})$  und erfüllt die Gleichung  $L\Gamma = 0$  klassisch.

- (c) Ist  $M$  geschlossen und  $0 \notin \text{spec}(L)$ , so sind

$$\begin{aligned} L : H^{2j}(M) &\rightarrow H^{2j-2}(M) \\ \text{und} \quad L^* : H^{-2j+2}(M) &\rightarrow H^{-2j}(M) \end{aligned}$$

Isomorphismen. Dann ist also  $\Gamma := (L^*)^{-1}\delta_p$  die eindeutige Green-Funktion von  $L$  an der Stelle  $p$ .

- (d) Sei nun  $\Gamma_p$  eine Green-Funktion von  $L$  an der Stelle  $y$  und nehmen wir an, dass  $(x, y) \mapsto k(x, y) := \Gamma_y(x)$  glatt von  $x$  und  $p$  abhängt, solange  $x \neq p$ . Diese Bedingung ist zum Beispiel erfüllt, falls  $M$  geschlossen ist mit  $0 \notin \text{spec}(L)$ , ist aber auch zum Beispiel im unten stehenden Beispiel 1.89 erfüllt. Zu  $f \in H^k(M)$  definiere

$$u(x) := \int_M k(x, y) f(y) \, \text{dvol}(y).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen existiert dieses Integral und die Grenzfunktion ist in  $H^k(M)$ , z. B. wenn  $M$  geschlossen ist und  $f \in \mathcal{C}^0(M) \cap H^k(M)$ . Dann ist  $u$  eine Lösung von  $Lu = f$ , was wir durch folgende formale Rechnung – ohne logisch vollständige Begründung – motivieren wollen. Hierbei ist  $L_x$  die Anwendung des Differentialoperators  $L$  in der  $x$ -Variable für festes  $y$ :

$$\begin{aligned} (Lu)|_x &= \int_M L_x k(x, y) f(y) \, \text{dvol}(y) \\ &= \int_M \delta_y(x) f(y) \, \text{dvol}(y) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

also  $Lu = f$ . Dies formale Rechnung deutet an, wieso Green-Funktionen ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen sind. Dieser Zugang wird im vorliegenden Buch allerdings nicht weiter ausgeführt.

### Beispiele 1.89.

- (1) Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  und  $n \geq 3$ . Setze  $r := |x|$ . Für eine beliebige Funktion  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} (\Delta^*(r^{2-n}), \varphi) &= (r^{2-n}, \Delta\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} r^{2-n} \Delta\varphi \, dx \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \Delta\varphi(r\vartheta) \, \text{dvol}^{S^{n-1}}(\vartheta) \, r^{2-n} r^{n-1} \, dr \\ &= \int_0^\infty \Delta \left( \underbrace{\int_{S^{n-1}} \varphi(r\vartheta) \, \text{dvol}^{S^{n-1}}(\vartheta)}_{=: \omega_{n-1} \psi(r)} \right) r \, dr \\ &= \omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty \left( -\psi'' - \frac{n-1}{r} \psi' \right) r \, dr \\ &= \omega_{n-1} \cdot \int_0^\infty (\psi' - (n-1)\psi') \, dr - \underbrace{\left[ \psi'(r) \cdot r \right]_0^\infty}_{=0} \\ &= -(n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \left[ \psi(r) \right]_0^\infty \\ &= (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \varphi(0) \\ &= (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot (\delta_0, \varphi). \end{aligned}$$

Somit ist  $\Delta^*(r^{2-n}) = (n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot \delta_0$ , d. h.  $\frac{1}{(n-2) \cdot \omega_{n-1}} \cdot r^{2-n}$  ist eine Green-Funktion

von  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$  an der Stelle 0. Setzt man  $r(x) := d(x, y)$ , so erhält man analog, dass

$$\Gamma_y^{eucl}(x) := \frac{1}{(n-2) \cdot \omega_{n-1}} \cdot |x - y|^{2-n}$$

eine Green-Funktion an der Stelle  $y$  ist.

- (2) Sei  $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g_{\text{eukl}})$ . Setze  $r := |x|$ . Für eine beliebige Funktion  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} (\Delta^*(\log(r)), \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \log(r) \cdot \Delta \varphi \, dr \\ &= \int_0^\infty \Delta \left( \underbrace{\int_{S^1} \varphi(r\vartheta) \, d\text{vol}^{S^1}(\vartheta)}_{=: 2\pi\psi(r)} \right) \log(r) r \, dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^\infty \left( -\psi'' - \frac{1}{r} \psi' \right) \cdot r \log(r) \, dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^\infty (\psi' \cdot (\log(r) + 1) - \psi' \cdot \log(r)) \, dr - 2\pi \cdot \underbrace{\left[ \psi' \cdot r \log(r) \right]_0^\infty}_{=0} \\ &= 2\pi \cdot \left[ \psi(r) \right]_0^\infty \\ &= -2\pi \cdot \varphi(0) \\ &= -2\pi \cdot (\delta_0, \varphi). \end{aligned}$$

Somit ist  $\Delta^*(\log(r)) = -2\pi \cdot \delta_0$ , d. h.  $-\frac{1}{2\pi} \cdot \log(r)$  ist eine Green-Funktion von  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^2$  an der Stelle 0. Setzt man  $r(x) := d(x, y)$ , so erhält man analog, dass

$$\Gamma_y^{eucl}(x) := -\frac{1}{2\pi} \cdot \log(|x - y|)$$

eine Green-Funktion an der Stelle  $y$  ist.

**Bemerkung 1.90.** Sei  $M$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ ,  $p \in M$  und  $\psi : U \rightarrow V$  Normalkoordinaten von  $M$  mit Entwicklungspunkt  $p \in U$ ,  $\psi(p) = 0$ . Angenommen, es gibt eine Green-Funktion  $\Gamma$  von  $L = a\Delta + h$  an der Stelle  $p$ ; dies ist insbesondere erfüllt, falls  $0 \notin \text{spec} L$ , wie oben gezeigt. Dann kann bewiesen werden, dass  $h(x) := a\Gamma(\psi^{-1}(x)) - \Gamma_0^{eucl}(x)$ ,  $x \in V \setminus \{0\}$  von „niedriger Ordnung“ als  $\Gamma_0^{eucl}$  ist. Genauer gesagt haben wir  $h(x) = o(|x|^{3-n})$ . Wir haben sogar  $h(x) = \mathcal{O}(|x|^{4-n})$ , falls  $n \geq 5$ . Wir werden den Beweis einer ähnlichen Aussage, Proposition 5.3, später skizzieren.

## 1.12. Hebbarkeitssatz

**Satz 1.91 (Hebbarkeitssatz).** Sei  $(M, g)$  eine (nicht-notwendigerweise vollständige) riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ . Sei  $N$  eine kompakte  $(n - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $2 \leq k \leq n$ . Sei  $h \in \mathcal{C}^0(M)$  und es gelte:

- $k \geq 3$  und  $u \in L_{\text{loc}}^q(M)$  für ein  $q \geq \frac{k}{k-2}$ ,

oder

- $k = 2$  und  $u \in L_{\text{loc}}^\infty(M)$ .

Angenommen  $u$  erfüllt

$$\Delta u + hu = \varrho \quad (1.64)$$

auf  $M \setminus N$  für  $\varrho \in L_{\text{loc}}^1(M)$  im schwachen Sinn auf  $M \setminus N$ . Dann gilt (1.64) auch auf  $M$  im schwachen Sinn. Ist zusätzlich  $\varrho \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$ , für  $0 < \alpha < 1$  und ist  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , dann haben wir  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ , und die Gleichung (1.64) gilt dann auch im klassischen Sinn.

**Bemerkung.** Im Rahmen dieses Buches werden wir nur den Spezialfall  $h \equiv 0$  und  $k = n \geq 3$  benötigen.

Wir erinnern daran, dass hier  $\varrho \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$  lokal zu verstehen ist, das heißt, dass  $|\varrho| \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(K) < \infty$  für alle  $K \Subset M$  gilt, also für alle Teilmengen  $K$  von  $M$ , deren Abschluss kompakt ist. Analoges gilt für  $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ . Dies impliziert für nicht-kompakte  $M$  i. Allg. nicht, dass die  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$ - bzw.  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(M)$ -Norm beschränkt ist.

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} u \in L_{\text{loc}}^q(M) &: \Leftrightarrow u|_K \in L^q(K) \quad \forall K \Subset M \\ &\Leftrightarrow u|_{K \setminus N} \in L^q(K \setminus N) \quad \forall K \Subset M \end{aligned}$$

Das Produkt einer stetigen Funktion mit einer lokal-integrierbaren Funktion ist lokal integrierbar. Somit ist  $hu \in L_{\text{loc}}^1(M)$ .

*Beweis für  $k \geq 3$ .*

Wir müssen für alle  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$  zeigen:

$$\int_M (u \Delta \varphi + u h \varphi) \, \text{dvol} = \int_M \varrho \varphi \, \text{dvol}.$$

Sei  $d_N(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in N\}$ . Zu  $\varepsilon > 0$  definieren wir

$$B_\varepsilon(N) := \{x \in M \mid d_N(x) < \varepsilon\}.$$

Wir verwenden ohne Beweis folgenden Satz der Differentialgeometrie: es gibt ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass  $d_N$  auf  $B_{\varepsilon_0}(N) \setminus N$  glatt ist, und die Funktion  $d_N$  ist sogar glatt auf  $B_{\varepsilon_0}(N)$ . Außerdem gilt dann  $|\nabla d_N| = 1$  auf  $B_{\varepsilon_0}(N) \setminus N$ .

Auf der kompakten Menge  $\overline{B}_{2\varepsilon_0/3}(N)$  ist die stetige Funktion  $|\nabla^2 d_N^2|$  beschränkt. Es gibt also eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} c &\geq |\nabla^2 d_N^2| \\ &= |\nabla(2d_N \nabla d_N)| \\ &= |2\nabla d_N \otimes \nabla d_N + 2d_N \nabla^2 d_N| \\ &\geq -2 \underbrace{|\nabla d_N \otimes \nabla d_N|}_{\leq 1} + 2d_N |\nabla^2 d_N| \\ &\geq -2 + 2d_N |\nabla^2 d_N| \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|\nabla^2 d_N| \leq \frac{c}{2d_N} + 1 \quad (1.65)$$

Man wähle nun eine Funktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\chi|_{(-\infty, 1]} \equiv 1$ ,  $\chi|_{[2, \infty)} \equiv 0$  und  $-2 \leq \chi' \leq 0$ . Zu  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0/3)$  definieren wir  $\chi_\varepsilon(x) := \chi(d_N(x)/\varepsilon)$ . Dann gilt  $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$  mit Träger in  $B_{2\varepsilon}(N)$ , und auf  $B_\varepsilon(N)$  gilt  $\chi_\varepsilon \equiv 1$ . Mit der Kettenregel erhalten wir

$$|\nabla \chi_\varepsilon| = \left| \chi'(d_N(x)/\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \nabla d_N \right| = |\chi'(d_N(x)/\varepsilon)| \frac{1}{\varepsilon} |\nabla d_N| \leq 2/\varepsilon.$$

Außerdem rechnen wir

$$\begin{aligned} |\nabla^2 \chi_\varepsilon| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \nabla \left( \chi'(d_N(x)/\varepsilon) \nabla d_N \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} |\chi''(d_N(x)/\varepsilon) \nabla d_N \otimes \nabla d_N| + \frac{1}{\varepsilon} |\chi'(d_N(x)/\varepsilon) \nabla^2 d_N| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\sup |\chi''|}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \left( \frac{c}{2d_N} + 1 \right) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante  $C$ , wobei wir für die Ungleichung  $(*)$  Ungleichung (1.65) und  $\text{supp } \chi'(d_N(\cdot)/\varepsilon) \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$  genutzt haben. Dann erhalten wir durch Spurbildung mit  $|\sum_{i=1}^n a_{ii}|^2 \leq n \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$  die Abschätzung  $|\Delta \chi_\varepsilon| \leq \frac{\sqrt{n}C}{\varepsilon^2}$ . Wir haben dann

$$\begin{aligned} \int_M u \Delta \varphi \, \text{dvol} &= \int_M u \Delta \left( (1 - \chi_\varepsilon) \varphi + \chi_\varepsilon \varphi \right) \, \text{dvol} \\ &= \int_M u \Delta \left( (1 - \chi_\varepsilon) \varphi \right) \, \text{dvol} + \int_M u (\Delta \chi_\varepsilon) \varphi \, \text{dvol} \\ &\quad - 2 \int_M u \langle \nabla \chi_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle \, \text{dvol} + \int_M u \chi_\varepsilon (\Delta \varphi) \, \text{dvol}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Da  $\Delta u = \varrho - hu$  auf  $M \setminus N$  im schwachen Sinn gilt, haben wir

$$\int_M u \Delta \psi \, \text{dvol} = \int_M (\varrho - hu) \psi \, \text{dvol} \quad (1.68)$$

für alle  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(M \setminus N)$ . Für  $\psi := (1 - \chi_\varepsilon)\varphi$  erhalten wir somit

$$\int_M u \Delta \left( (1 - \chi_\varepsilon)\varphi \right) \, \text{dvol} = \int_M (\varrho - hu)(1 - \chi_\varepsilon)\varphi \, \text{dvol}. \quad (1.69)$$

Der Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue ergibt hieraus unter Verwendung von  $\varrho - hu \in L^1_{\text{loc}}(M)$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u \Delta \left( (1 - \chi_\varepsilon)\varphi \right) \, \text{dvol} = \int_M (\varrho - hu) \varphi \, \text{dvol}. \quad (1.70)$$

Ganz ähnlich bekommen wir aus dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u \chi_\varepsilon (\Delta \varphi) \, \text{dvol} = 0. \quad (1.71)$$

Wegen  $u \in L^{\frac{k}{k-2}}_{\text{loc}}(M)$  erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_M u (\Delta \chi_\varepsilon) \varphi \, \text{dvol} \right| &\leq \frac{\sqrt{n}C \|\varphi\|_{L^\infty}}{\varepsilon^2} \int_{B_{2\varepsilon}(N)} |u| \, \text{dvol} \\ &\leq \frac{C'}{\varepsilon^2} \left( \int_{B_{2\varepsilon}(N)} |u|^{\frac{k}{k-2}} \, \text{dvol} \right)^{\frac{k-2}{k}} \text{vol}(B_{2\varepsilon}(N))^{\frac{2}{k}}. \end{aligned}$$

Wir nutzen  $\text{vol}(B_{2\varepsilon}(N)) = \mathcal{O}(\varepsilon^k)$  und betrachten den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Auf Grund von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_{2\varepsilon}(N)} |u|^{\frac{k}{k-2}} \, \text{dvol} = 0$$

erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u (\Delta \chi_\varepsilon) \varphi \, \text{dvol} = 0. \quad (1.72)$$

Auf ähnliche Art und Weise bekommen wir

$$\begin{aligned} \left| \int_M u \langle \nabla \chi_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle_g \, \text{dvol} \right| &\leq \frac{C'' \|\nabla \varphi\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \int_{B_{2\varepsilon}(N)} |u| \, \text{dvol} \\ &\leq \frac{C'''}{\varepsilon} \left( \int_{B_{2\varepsilon}(N)} |u|^{\frac{k}{k-2}} \, \text{dvol} \right)^{\frac{k-2}{k}} \text{vol}(B_{2\varepsilon}(N))^{\frac{2}{k}} \\ &\leq C_0 \varepsilon \|u\|_{L^{\frac{k}{k-2}}}^{\frac{k}{k-2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u \langle \nabla \chi_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle_g \, \text{dvol} = 0. \quad (1.73)$$

Wir setzen (1.70), (1.72), (1.73) und (1.71) in (1.67) ein und erhalten daraus die erste Aussage von Satz 1.91.

Wir nehmen nun zusätzlich  $\varrho \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(M)$  an. Zusammen mit  $u \in L^q_{\text{loc}}(M)$  für ein  $q \geq k/(k-2) > 1$  liefert Übung 1.10 dann die gewünschte Regularität. Gleichung (1.64) gilt dann also im klassischen Sinn.  $\square$

*Beweis für  $k = 2$ .*

In diesem Fall gehen wir ähnlich wie im Fall  $k \geq 3$  vor, müssen aber die Abschneidefunktion etwas sorgfältiger wählen. Sie hängt nun zunächst von zwei Parametern  $\varepsilon$  und  $\ell$  ab und wird deswegen  $\chi_{\ell,\varepsilon}$  genannt. Wir definieren zunächst diese Funktionen, und erklären dann, wie man die nötigen Abschätzungen dann passend dazu durchführen kann.

Für jedes  $\ell \geq 3$  wählen wir eine glatte Funktion  $\kappa_\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, \ell]$  mit

$$\kappa_\ell(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } s \leq 0, \\ s & \text{für } 1 \leq s \leq \ell - 1, \\ \ell & \text{für } s \geq \ell. \end{cases} \quad (1.74)$$

Auf den Intervallen  $[0, 1]$  und  $[\ell - 1, \ell]$  geben wir die Funktion nicht explizit an, aber man sieht leicht, dass man  $|\kappa'_\ell| \leq 2$  und  $|\kappa''_\ell| \leq C_1$  für eine universelle Konstante  $C_1 > 0$  erreichen kann. Man kann zum Beispiel  $C_1 = 4$  erreichen.

An Stelle der oben konstruierten Abschneidefunktion  $\chi_\varepsilon$  schneiden wir im Fall  $k = 2$  mit der folgenden glatten Funktion  $\chi_{\ell,\varepsilon} : M \rightarrow [0, 1]$  ab. Zu  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  und  $\ell \geq 3$  definieren wir

$$\chi_{\ell,\varepsilon}(x) := 1 - \frac{1}{\ell} \kappa_\ell \left( \log \left( \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} \right) \right). \quad (1.75)$$

Wir erhalten dann:

$$\chi_{\ell,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } d_N(x) \leq e^{-\ell} \varepsilon, \\ 1 - \frac{1}{\ell} \log \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} & \text{für } e^{-\ell+1} \varepsilon \leq d_N(x) \leq e^{-1} \varepsilon, \\ 0 & \text{für } d_N(x) \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (1.76)$$

Falls  $d_N(x) < e^{-\ell} \varepsilon$  oder falls  $d_N(x) > \varepsilon$ , dann gilt offensichtlich  $\nabla \chi_{\ell,\varepsilon} = 0$  und  $\Delta \chi_{\ell,\varepsilon} = 0$ .

In den folgenden Rechnungen ist hilfreich zu nutzen, dass  $(\log \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon}) - (1/2) \log(d_N^2)$  konstant ist. Für  $e^{-\ell+1} \varepsilon < d_N(x) < e^{-1} \varepsilon$  rechnen wir unter Nutzung von Gleichung (1.23) in der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \nabla \chi_{\ell,\varepsilon} &= -\frac{1}{\ell} \nabla \log \left( \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} \right) \\ &= -\frac{1}{\ell} \frac{\nabla d_N}{d_N} \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \Delta \chi_{\ell,\varepsilon} &= -\frac{1}{\ell} \left( \frac{1}{2d_N^2} \Delta(d_N^2) + \frac{1}{2d_N^4} |\nabla(d_N^2)|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{\ell} \left( \frac{1}{2d_N^2} (-4 + \mathcal{O}(d_N)) + \frac{4}{2d_N^2} \right) = \frac{1}{\ell} \mathcal{O} \left( \frac{1}{d_N} \right). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Für  $e^{-\ell} \varepsilon \leq d_N(x) \leq e^{-\ell+1} \varepsilon$  und für  $e^{-1} \varepsilon \leq d_N(x) \leq \varepsilon$  schätzen wir wie folgt ab:

$$|\nabla \chi_{\ell,\varepsilon}| = \frac{1}{\ell} \kappa'_\ell \left( \log \left( \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} \right) \right) \left| \frac{\nabla d_N}{d_N} \right|$$

$$\leq \frac{2}{\ell d_N} \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} |\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}| &= \left| -\frac{1}{\ell} \kappa'_\ell \left( \log \left( \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} \right) \right) \left( \frac{1}{2d_N^2} \Delta(d_N^2) + \frac{1}{2d_N^4} |\nabla(d_N^2)|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\ell} \kappa''_\ell \left( \log \left( \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} \right) \right) \left| \nabla \log \left( \frac{d_N(x) e^\ell}{\varepsilon} \right) \right|^2 \right| \\ &\leq \frac{2}{\ell} \mathcal{O} \left( \frac{1}{d_N} \right) + \frac{C_1}{\ell d_N^2} \leq \frac{1}{\ell} \frac{C_2}{d_N^2}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

für eine Konstante  $C_2$ , die durch  $C_1$ ,  $\varepsilon_0$  und die Konstante in  $\mathcal{O} \left( \frac{1}{d_N} \right)$  bestimmt ist, die also innerhalb dieses Beweises fixiert bleibt.

Wie im Fall  $k \geq 3$  reicht es nun die Integrale

$$\int_M u(\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}) \varphi \, \text{dvol}, \quad \int_M u \langle \nabla \chi_{\ell, \varepsilon}, \nabla \varphi \rangle_g \, \text{dvol}, \quad \text{und} \quad \int_M u \chi_{\chi, \varepsilon} (\Delta^g \varphi) \, \text{dvol}$$

so abzuschätzen, dass sie für geeignete  $\varepsilon$  und  $\ell$  beliebig klein werden. Da  $\text{supp } \chi_{\chi, \varepsilon}$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $N$  enthalten ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_M u \chi_{\chi, \varepsilon} (\Delta^g \varphi) \, \text{dvol} = 0.$$

Für den Term mit  $\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}$  schätzen wir wieder ab

$$\left| \int_M u(\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}) \varphi \, \text{dvol} \right| \leq \|u\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^\infty} \int_M |\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}| \, \text{dvol}.$$

Den Integrationsbereich zerlegen wir in die Gebiete

$$\begin{aligned} Z_{\ell, \varepsilon}^{\text{mid}} &:= \left\{ x \in M \mid e^{-\ell+1} \varepsilon < d_N(x) < e^{-1} \varepsilon \right\} \quad \text{und} \\ Z_{\ell, \varepsilon}^{\text{trans}} &:= \left\{ x \in M \mid e^{-\ell} \varepsilon \leq d_N(x) \leq e^{-\ell+1} \varepsilon \text{ oder } e^{-1} \varepsilon \leq d_N(x) \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Aus (1.78) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{Z_{\ell, \varepsilon}^{\text{mid}}} |\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}| \, \text{dvol} &\leq \frac{1}{\ell} \int_{Z_{\ell, \varepsilon}^{\text{mid}}} \frac{C_3}{d_N(x)} \, \text{dvol}(x) \\ &\stackrel{k=2}{\leq} \frac{1}{\ell} \int_{e^{-\ell+1} \varepsilon}^{e^{-1} \varepsilon} \frac{C_4}{r} r \, dr \\ &\leq \frac{C_4}{e\ell} \varepsilon \leq \frac{C_4}{3e} \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Und aus (1.80) erhalten wir

$$\int_{Z_{\ell, \varepsilon}^{\text{trans}}} |\Delta \chi_{\ell, \varepsilon}| \, \text{dvol} \leq \frac{1}{\ell} \int_{Z_{\ell, \varepsilon}^{\text{trans}}} \frac{C_2}{d_N(x)^2} \, \text{dvol}(x)$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{k=2}{\leq} \frac{C_5}{\ell} \left( \int_{e^{-\ell}\varepsilon}^{e^{-\ell+1}\varepsilon} \frac{1}{r^2} r \, dr + \int_{e^{-1}\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{r^2} r \, dr \right) \\
& = \frac{C_5}{\ell} \left( \log(e^{-\ell+1}\varepsilon) - \log(e^{-\ell}\varepsilon) + \log(\varepsilon) - \log(e^{-1}\varepsilon) \right) \\
& = 2 \frac{C_5}{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Im Limes  $\ell = \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$  geht also  $\int_M u(\Delta \chi_{\ell,\varepsilon}) \varphi \, \text{dvol}$  gegen Null.

Es ergibt sich aus (1.77) und (1.79)

$$\begin{aligned}
\left| \int_M u \langle \nabla \chi_{\ell,\varepsilon}, \nabla \varphi \rangle_g \, \text{dvol} \right| & \leq \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \int_{Z_{\ell,\varepsilon}^{\text{trans}} \cup Z_{\ell,\varepsilon}^{\text{mid}}} \frac{2}{\ell d_N(x)} \, \text{dvol}(x) \\
& \leq \frac{C_6}{\ell} \left( \int_{e^{-\ell}\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{r} r \, dr \right) \\
& \leq \frac{C_6}{\ell} \varepsilon \xrightarrow{\ell = \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Im Limes  $\ell = \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$  folgt also die Aussage.  $\square$

**Bemerkung 1.92.** Die Voraussetzungen des Hebbarkeitssatzes können noch auf mehrere Weisen abgeschwächt werden.

- (i) Der obige Beweis kann nahezu wortwörtlich genutzt werden, um den Hebbarkeitssatz auch für eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeiten  $N$  zu zeigen. Hierbei heißt eine Untermannigfaltigkeit *eigentlich eingebettet*, wenn die Inklusion  $N \hookrightarrow M$  eigentlich (und eine Einbettung) ist; in anderen Worten, wenn gilt: für alle kompakten Teilmengen  $K \subset M$  ist  $N \cap K$  kompakt. Es gibt dann zwar kein  $\varepsilon_0$  wie im obigen Beweis für ganz  $N$ . Wenn man im Beweis  $K := \text{supp } \varphi$  setzt, dann kann man solch ein passendes  $\varepsilon_0$  auf einer Umgebung von  $K \cap N$  finden.
- (ii) Die Beweise kann man ähnlich durchführen, wenn  $N$  eine Untermannigfaltigkeit mit Rand (oder sogar mit Ecken) ist.

**Beispiel 1.93.** Im Fall  $M = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  und  $N = \{0\}$  erhalten wir den Hebbarkeitssatz der Funktionentheorie. Der Realteil  $u$  einer holomorphen Funktion  $f = u + iv$  erfüllt  $\Delta u = 0$  und umgekehrt ist auch jede Funktion  $u$  mit  $\Delta u = 0$  lokal der Realteil einer holomorphen Funktion. Der obige Hebbarkeitssatz für  $n = k = 2$  besagt also insbesondere aus: Ist  $f : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität in 0 und ist  $\text{Re } f$  auf einer Umgebung von 0 beschränkt, so kann die Funktion  $f$  zu einer auf  $\Omega$  definierten holomorphen Funktion fortgesetzt werden (man sagt hierzu oft: die Singularität von  $f$  in 0 ist hebbar).

**Beispiel 1.94.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 4$ ,  $x_0 \in M$ ,  $N := \{x_0\}$ ,  $h \in C^\infty(M)$ ,  $q \geq n/(n-2)$ . Sei  $\Gamma$  die Green-Funktion von

$u \mapsto a\Delta u + hu$  an der Stelle  $x_0$  gemäß Definition 1.87. Wir schreiben  $r(x) := d(x, x_0)$ . Dann gilt für kleine  $r > 0$  die Entwicklung

$$\Gamma(x) = cr^{2-n} + \mathcal{O}(r^{3-n})$$

für  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ . Es gibt Konstanten  $C_1, C_2, \tilde{c} \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{c} \neq 0$  und eine kleine Konstante  $r_0 > 0$ , so dass für  $\delta \in (0, r_0)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus B_\delta(x_0)} |\Gamma(x)|^q \, \text{dvol} &= C_1 + |c|^q \, \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_\delta^{r_0} (r^{2-n} + \mathcal{O}(r^{3-n}))^q r^{n-1} \, dr \\ &= C_2 + \tilde{c} \int_\delta^{r_0} r^{(2-n)q + (n-1)} \, dr + \text{Terme niedrigerer Ordnung in } \delta \end{aligned}$$

Das Integral divergiert für  $\delta \rightarrow 0$ , da  $(2-n)q + (n-1) \leq -n + (n-1) = -1$ . Green-Funktionen erfüllen die Voraussetzungen des Satzes also nicht, und sie können auch nicht fortgesetzt werden.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass der Hebbarkeitssatz für  $q < k/(k-2)$  nicht mehr gilt; denn dann haben wir  $(2-n)q + (n-1) > -1$  und somit  $\Gamma \in L^q(M)$ .

## 2. Konforme Geometrie

In diesem Kapitel untersuchen wir insbesondere, wie sich geometrische Größen unter konformen Änderungen verändern. Wir untersuchen auch die konforme Gruppe der Sphäre und die konforme Klasse von Einstein-Metriken.

### 2.1. Konforme Änderungen der Metrik

**Erinnerung 2.1.** Der Gradient einer differenzierbaren Funktion  $f$  auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist das Vektorfeld  $\text{grad } f \in \Gamma(TM)$  mit  $\langle \text{grad } f(p), X \rangle = \nabla f(X)$  für alle  $p \in M$  und alle  $X \in T_p M$ . In lokalen Koordinaten ist  $\text{grad } f = g^{ij}(\partial_i f) \cdot \partial_j$ .

**Definition 2.2.** Man sagt: Zwei riemannsche Metriken  $g$  und  $\bar{g}$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  sind *konform*, wenn es eine glatte Funktion  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, mit  $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$ . Die Menge aller Metriken, die konform zu  $g$  sind, nennt man die *konforme Klasse von  $g$*  und man schreibt sie als  $[g]$ .

Zwei riemannsche Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  und  $(M', g')$  nennt man *konform äquivalent*, wenn es einen Diffeomorphismus  $\varphi: M \rightarrow M'$  gibt, so dass  $\varphi^*(g') \in [g]$ . Im Fall  $M = M'$  sagt man dann auch, dass  $g$  und  $g'$  konform äquivalent sind. Eine derartige Abbildung  $\varphi$  nennt man einen *konformen Diffeomorphismus* oder eine *konforme Äquivalenz*.

Sind zwei Metriken also konform zueinander, so sind sie auch konform äquivalent, aber die Umkehrung gilt nicht.

**Lemma 2.3.** Seien  $g$  und  $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$  konforme riemannsche Metriken auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  und  $u \in C^\infty(M)$ . Dann gilt:

- (i) Der Levi-Civita-Zusammenhang auf  $TM$  zur Metrik  $\bar{g}$  ist gegeben durch folgende Formel. Hierbei ist  $Y \in \Gamma(TM)$  und  $X$  kann entweder ein Tangentialvektor  $X \in TM$  oder ein Vektorfeld  $X \in \Gamma(TM)$  sein.

$$\nabla_X^{\bar{g}} Y = \nabla_X^g Y + \nabla u(X) \cdot Y + \nabla u(Y) \cdot X - g(X, Y) \cdot \text{grad}_g u. \quad (2.1)$$

- (ii) Der  $(0, 4)$ -Krümmungstensor bzgl.  $\bar{g}$  ist wie folgt gegeben. Es gilt für alle  $X, Y, U, W \in TM$ :

$$\begin{aligned} \langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}} \\ = e^{2u} \cdot \left\{ \langle R^g(X, Y)Z, W \rangle_g \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nabla^2 u(X, Z) \cdot \langle Y, W \rangle - \nabla^2 u(X, W) \cdot \langle Y, Z \rangle \\
& - \nabla^2 u(Y, Z) \cdot \langle X, W \rangle + \nabla^2 u(Y, W) \cdot \langle X, Z \rangle \\
& - \nabla u(X) \nabla u(Z) \cdot \langle Y, W \rangle + \nabla u(Y) \nabla u(Z) \cdot \langle X, W \rangle \\
& - \nabla u(Y) \nabla u(W) \cdot \langle X, Z \rangle + \nabla u(X) \nabla u(W) \cdot \langle Y, Z \rangle \\
& + \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle |\nabla u|^2 - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle |\nabla u|^2 \}. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Hierbei sind alle Terme auf der rechten Seite bzgl. der Metrik  $g$ .

(iii) Der Ricci-Tensor (als Bilinearform) bzgl.  $\bar{g}$  ergibt sich zu:

$$\text{ric}^{\bar{g}} = \text{ric}^g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) + (\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2) \cdot g. \quad (2.3)$$

(iv) Für die Skalarkrümmung bzgl.  $\bar{g}$  erhalten wir dann:

$$\text{scal}^{\bar{g}} = e^{-2u} \cdot \{ \text{scal}^g + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2 \}. \quad (2.4)$$

(v) Für den spurfreien Anteil  $B^g = \text{ric}^g - \frac{\text{scal}^g}{n} \cdot g$  des Ricci-Tensors finden wir schließlich:

$$B^{\bar{g}} = B^g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n}(\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g. \quad (2.5)$$

*Beweis.*

(i) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
X \langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} &= X(e^{2u} \langle Y, Z \rangle_g) \\
&= e^{2u} \cdot 2\nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_g + e^{2u} \cdot X \langle Y, Z \rangle_g \\
&= 2\nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} + e^{2u} \cdot X \langle Y, Z \rangle_g.
\end{aligned}$$

Die Koszul-Formel (A.2) in Abschnitt A.1.4 des Anhangs liefert daher:

$$\begin{aligned}
2 \langle \nabla_X^{\bar{g}} Y, Z \rangle_{\bar{g}} &= X \langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} + Y \langle Z, X \rangle_{\bar{g}} - Z \langle X, Y \rangle_{\bar{g}} \\
&\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle_{\bar{g}} + \langle Y, [Z, X] \rangle_{\bar{g}} + \langle Z, [X, Y] \rangle_{\bar{g}} \\
&= e^{2u} \left\{ 2\nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_g + 2\nabla u(Y) \cdot \langle Z, X \rangle_g - 2\nabla u(Z) \cdot \langle X, Y \rangle_g \right. \\
&\quad \left. + X \langle Y, Z \rangle_g + Y \langle Z, X \rangle_g - Z \langle X, Y \rangle_g \right. \\
&\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle_g + \langle Y, [Z, X] \rangle_g + \langle Z, [X, Y] \rangle_g \right\} \\
&= 2e^{2u} \left\{ \nabla u(X) \cdot \langle Y, Z \rangle_g + \nabla u(Y) \cdot \langle Z, X \rangle_g - \nabla u(Z) \cdot \langle X, Y \rangle_g \right. \\
&\quad \left. + \langle \nabla_X^g Y, Z \rangle_g \right\} \\
&= 2 \langle \nabla_X^g Y + \nabla u(X) \cdot Y + \nabla u(Y) \cdot X - \langle X, Y \rangle \cdot \text{grad } u, Z \rangle_{\bar{g}}.
\end{aligned}$$

- (ii) Der Krümmungstensor  $R^{\bar{g}}$  ist tensoriell in allen Einträgen, d. h. der Wert in  $p$  von  $\langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}}$  hängt nur von  $X, Y, Z, W \in T_p M$  ab. Wähle daher Fortsetzungen von  $X, Y, Z$  zu Vektorfeldern, für die paarweise alle kovarianten Ableitungen bzgl.  $g$  in  $p$  verschwinden, also  $(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_Y X)(p) = [X, Y](p) = 0$  und analog für  $X, Z$  bzw.  $Y, Z$ . In dem Krümmungstensor verschwinden daher im betrachteten Punkt bereits die Terme mit kovarianten Ableitungen nach  $[X, Y]$  bzw.  $[Y, Z]$ . Wir haben also:

$$\begin{aligned} \langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}}(p) &= \left\langle (\nabla^{\bar{g}})^2_{X,Y} Z - (\nabla^{\bar{g}})^2_{Y,X} Z, W \right\rangle_{\bar{g}}(p) \\ &= \langle \nabla^{\bar{g}}_X \nabla^{\bar{g}}_Y Z, W \rangle_{\bar{g}}(p) - \langle \nabla^{\bar{g}}_Y \nabla^{\bar{g}}_X Z, W \rangle_{\bar{g}}(p). \end{aligned}$$

Bei der folgenden Berechnung von  $\langle \nabla^{\bar{g}}_X \nabla^{\bar{g}}_Y Z, W \rangle_{\bar{g}}(p)$  können wir ferner alle Terme ignorieren, die symmetrisch in  $X, Y$  sind, denn diese fallen bei der anschließenden Antisymmetrisierung zu  $\langle R^{\bar{g}}(X, Y)Z, W \rangle_{\bar{g}}(p)$  ohnehin weg. Wir erhalten also durch zweimaliges Anwenden von (2.1) (hier und im Folgenden sind Terme ohne Index stets bzgl.  $g$ ):

$$\begin{aligned} &e^{-2u} \cdot \langle \nabla^{\bar{g}}_X \nabla^{\bar{g}}_Y Z, W \rangle_{\bar{g}}(p) \\ &= \left( \left\langle \nabla^{\bar{g}}_X (\nabla_Y Z + \nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u), W \right\rangle \right)(p) \\ &= \left( \left\langle \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X (\nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u), W \right\rangle \right. \\ &\quad + \nabla u(X) \cdot \left\langle (\nabla_Y Z + \nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u), W \right\rangle \\ &\quad + \left( \nabla u(Y) \nabla u(Z) + \nabla u(Z) \nabla u(Y) - \langle Y, Z \rangle \cdot \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right) \cdot \langle X, W \rangle \\ &\quad \left. - \langle X, \nabla_Y Z + \nabla u(Y) \cdot Z + \nabla u(Z) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \text{grad } u \rangle \cdot \langle \text{grad } u, W \rangle \right)(p) \\ &= \left( \left\langle \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X (\nabla u(Y)) \cdot Z + \nabla_X (\nabla u(Z)) \cdot Y - \langle Y, Z \rangle \cdot \nabla_X \text{grad } u, W \right\rangle \right. \\ &\quad + \nabla u(X) \nabla u(Y) \langle Z, W \rangle + \nabla u(X) \nabla u(Z) \langle Y, W \rangle - \nabla u(X) \nabla u(W) \langle Y, Z \rangle \\ &\quad + \nabla u(Y) \nabla u(Z) \langle X, W \rangle + \nabla u(Z) \nabla u(Y) \langle X, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle |\nabla u|^2 \\ &\quad \left. - \nabla u(Y) \nabla u(W) \langle X, Z \rangle + \nabla u(Z) \nabla u(W) \langle X, Y \rangle + \nabla u(X) \nabla u(W) \langle Y, Z \rangle \right)(p) \\ &= \left( \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle + \nabla^2 u(X, Z) \langle Y, W \rangle - \nabla^2 u(X, W) \langle Y, Z \rangle \right. \\ &\quad + \nabla u(Y) \nabla u(Z) \langle X, W \rangle - \nabla u(Y) \nabla u(W) \langle X, Z \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle |\nabla u|^2 \\ &\quad \left. + \text{Terme symmetrisch in } X, Y \right)(p) \end{aligned}$$

Zusammen mit den entsprechenden Termen für  $\langle \nabla_Y^{\bar{g}} \nabla_X^{\bar{g}} Z, W \rangle_{\bar{g}}(p)$  ergibt sich die Behauptung.

- (iii) Bilden  $e_j, j = 1 \dots n$  eine lokale Orthonormalbasis für  $g$ , so bilden  $e^{-u}e_j, j = 1 \dots n$  eine lokale Orthonormalbasis für  $\bar{g}$ . Wir erhalten daher für den Ricci-Tensor, ausgewertet in  $X, W$ :

$$\begin{aligned}
 \text{ric}^{\bar{g}}(X, W) &= \sum_{j=1}^n \langle R^{\bar{g}}(X, e^{-u}e_j)e^{-u}e_j, W \rangle_{\bar{g}} \\
 &= \sum_{j=1}^n e^{-2u} \cdot \langle R^g(X, e_j)e_j, W \rangle_g \\
 &= \sum_{j=1}^n \left( \langle R^g(X, e_j)e_j, W \rangle \right. \\
 &\quad + \nabla^2 u(X, e_j) \cdot \langle e_j, W \rangle - \nabla^2 u(X, W) \cdot \langle e_j, e_j \rangle \\
 &\quad - \nabla^2 u(e_j, e_j) \cdot \langle X, W \rangle + \nabla^2 u(e_j, W) \cdot \langle X, e_j \rangle \\
 &\quad - \nabla u(X) \nabla u(e_j) \cdot \langle e_j, W \rangle + \nabla u(e_j) \nabla u(e_j) \cdot \langle X, W \rangle \\
 &\quad - \nabla u(e_j) \nabla u(W) \cdot \langle X, e_j \rangle + \nabla u(X) \nabla u(W) \cdot \langle e_j, e_j \rangle \\
 &\quad \left. + \langle X, e_j \rangle \langle e_j, W \rangle |\nabla u|^2 - \langle e_j, e_j \rangle \cdot \langle X, W \rangle \cdot |\nabla u|^2 \right) \\
 &= \text{ric}^g(X, W) + \nabla^2 u(X, W) - n \cdot \nabla^2 u(X, W) \\
 &\quad + \Delta u \cdot \langle X, W \rangle + \nabla^2 u(X, W) \\
 &\quad - \nabla u(X) \nabla u(W) + |\nabla u|^2 \langle X, W \rangle \\
 &\quad - \nabla u(X) \nabla u(W) + n \cdot \nabla u(X) \nabla u(W) \\
 &\quad + |\nabla u|^2 \langle X, W \rangle - n \cdot |\nabla u|^2 \langle X, W \rangle \\
 &= \text{ric}^g(X, W) - (n-2) \nabla^2 u(X, W) + (n-2) \nabla u(X) \nabla u(W) \\
 &\quad + \Delta u \cdot \langle X, W \rangle - (n-2) |\nabla u|^2 \cdot \langle X, W \rangle.
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $\text{tr}(-\nabla^2 u) = \Delta u$ .

- (iv) Die Skalarkrümmung erhalten wir als Spur des Ricci-Tensors:

$$\begin{aligned}
 \text{scal}^{\bar{g}} &= \sum_{i=1}^n \text{ric}^{\bar{g}}(e^{-u}e_i, e^{-u}e_i) \\
 &= e^{-2u} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \text{ric}^g(e_i, e_i) - (n-2) (\nabla^2 u)(e_i, e_i) + (n-2) \nabla u(e_i) \nabla u(e_i) \right. \\
 &\quad \left. + \Delta u \cdot \langle e_i, e_i \rangle - (n-2) |\nabla u|^2 \cdot \langle e_i, e_i \rangle \right\} \\
 &= e^{-2u} \cdot \left\{ \text{scal}^g + (n-2) \Delta u + (n-2) |\nabla u|^2 + n \cdot \Delta u \right. \\
 &\quad \left. - n \cdot (n-2) \cdot |\nabla u|^2 \right\}
 \end{aligned}$$

(v) Aus (2.3) und (2.4) berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 B^{\bar{g}} &= \operatorname{ric}^{\bar{g}} - \frac{\operatorname{scal}^{\bar{g}}}{n} \cdot \bar{g} \\
 &= \operatorname{ric}^g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) + (\Delta u - (n-2)|\nabla u|^2) \cdot g \\
 &\quad - \frac{1}{n}(\operatorname{scal}^g + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2) \cdot g \\
 &= B^g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) \\
 &\quad + \left( \left(1 - 2\frac{n-1}{n}\right) \cdot \Delta u + \left( \frac{(n-2)(n-1)}{n} - (n-2) \right) \cdot |\nabla u|^2 \right) \cdot g.
 \end{aligned}$$

□

Im Folgenden sei – wenn nichts anderes explizit angegeben wurde –  $\dim(M) = n \geq 3$ .

**Definition 2.4.** Der Differentialoperator  $Y$ , definiert durch

$$Y(\varphi) := \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi + \operatorname{scal} \cdot \varphi,$$

heißt *Yamabe-Operator* oder *konformer Laplace-Operator*.

Wir schreiben ab sofort  $a := 4\frac{n-1}{n-2}$ .

**Lemma 2.5.** Ist  $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$ , so gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{C}^2(M)$ :

$$Y^{\bar{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} Y^g \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \cdot \varphi \right).$$

*Beweis.*

Wir nutzen Lemma 1.36 und rechnen:

$$\begin{aligned}
 Y^{\bar{g}}(\varphi) &= ae^{-2u} \left( \Delta^g \varphi - (n-2) \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \right) \\
 &\quad + e^{-2u} \left( \operatorname{scal}^g + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2 \right) \cdot \varphi \\
 &= ae^{-2u} \left( \Delta^g \varphi - (n-2) \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\frac{n-2}{2} \Delta^g u \cdot \varphi - \frac{(n-2)^2}{4} |\nabla u|^2 \varphi}_{= e^{-\frac{n-2}{2} \cdot u} \Delta \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \right) \cdot \varphi} + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{scal}^g \cdot \varphi \right) \\
 &= ae^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \Delta^g \varphi - \frac{2(n-2)}{2} e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \Delta \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \right) \cdot \varphi + a^{-1} e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \operatorname{scal}^g \cdot \varphi \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(1.22)}{=} e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} \left( a \Delta^g \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \varphi \right) + e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \operatorname{scal}^g \cdot \varphi \right) \\
&= e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} Y^g \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \cdot \varphi \right).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.6.** Wenn wir den Yamabe-Operator etwas anders normieren, dann gilt Lemma 2.5 auch für  $n = 2$ . Genauer, wenn wir  $\tilde{Y}$  als

$$\tilde{Y}(\varphi) := \Delta \varphi + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{scal} \cdot \varphi,$$

definieren, so gilt  $\tilde{Y}_{\bar{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2} \cdot u} \tilde{Y}_g \left( e^{\frac{n-2}{2} \cdot u} \cdot \varphi \right)$  für alle  $n \geq 2$ . Dies folgt aus Lemma 2.5 für  $n \geq 3$  und aus Lemma 1.36 für  $n = 2$ . Im Fall  $n = 2$  vereinfacht sich die Formel zu

$$\Delta e^{2u} g = e^{-2u} \Delta g.$$

Sei nun wieder  $n = \dim M \geq 3$ . Mit der Substitution  $e^{2u} = f^{p_c-2} = f^{\frac{4}{n-2}}$  mit  $p_c = \frac{2n}{n-2}$  erhalten wir:

**Folgerung 2.7.** Für  $\bar{g} = f^{\frac{4}{n-2}} g$  gilt

$$Y^{\bar{g}}(f^{-1} \varphi) = f^{1-p_c} Y^g(\varphi). \quad (2.6)$$

$\varphi = f$  liefert insbesondere für das konforme Transformationsverhalten der Skalar-  
krümmung:

$$\operatorname{scal}^{\bar{g}} = f^{1-p_c} Y^g(\varphi) = f^{1-p_c} \left( 4 \frac{n-1}{n-2} \Delta^g f + \operatorname{scal}^g \cdot f \right). \quad (2.7)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
Y^g(\varphi) &= e^{\frac{n+2}{2} \cdot u} Y^{\bar{g}} \left( e^{-\frac{n-2}{2} \cdot u} \varphi \right) \\
&= e^{\frac{n+2}{4} \cdot 2u} Y^{\bar{g}} \left( e^{-\frac{n-2}{4} \cdot 2u} \varphi \right) \\
&= f^{(p_c-2) \cdot \frac{n+2}{4}} Y^{\bar{g}} \left( f^{-(p_c-2) \cdot \frac{n-2}{4}} \varphi \right) \\
&= f^{p_c-1} Y^{\bar{g}}(f^{-1} \cdot \varphi),
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\frac{n+2}{4} = \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n+2}{n-2}$  und  $p_c - 2 = \frac{2n}{n-2} - 2 = \frac{2n-2(n-2)}{n-2} = \frac{4}{n-2}$  sowie  $p_c - 1 = \frac{2n}{n-2} - 1 = \frac{2n-(n-2)}{n-2} = \frac{n+2}{n-2}$ .  
Setzen wir  $\varphi = f$  in (2.6) ein, so erhalten wir:

$$Y^{\bar{g}}(1) = \operatorname{scal}^{\bar{g}}$$



$$\begin{aligned}
&= f^{1-p} Y^g(f) \\
&= f^{1-p} (a\Delta(f) + \text{scal}^g \cdot f) .
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden sei  $n \geq 3$ ,  $p_c = \frac{2n}{n-2}$  und  $a = \frac{4(n-1)}{n-2} = p_c + 2$ .  $Y = a\Delta + \text{scal}$ . **ACHTUNG:** In Teilen des Skripts wird auch noch die alte Notation:  $a := \frac{n-2}{4(n-1)}$ , also  $Y = \Delta + a \cdot \text{scal}$  verwendet. Dies kann derzeit noch zu falschen Aussagen führen. Mit obigen Rechnungen finden wir: Die Metrik  $\bar{g} = e^{2u} \cdot g = f^{p_c-2} \cdot g$  hat konstante Skalarkrümmung  $s$  unter der folgenden Bedingung

$$\begin{aligned}
\text{scal}^{\bar{g}} = s &\Leftrightarrow f^{1-p_c} (a\Delta^g f + \text{scal}^g \cdot f) = s \\
&\Leftrightarrow a\Delta^g f + \text{scal}^g \cdot f = s \cdot f^{p_c-1} \\
&\Leftrightarrow Y^g(f) = s \cdot f^{p_c-1} .
\end{aligned}$$

Wie wir noch sehen werden, hängt das Lösungsverhalten der nicht-linearen Eigenwertgleichung  $Y(\varphi) = \lambda \cdot \varphi^q$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  konstant, stark von dem Wert  $q$  ab. Der kritische Wert ist genau der für das Yamabe-Problem relevante, also  $q = p_c - 1 = \frac{n+2}{n-2}$ . Für  $q < \frac{n+2}{n-2}$  ist die Lösungstheorie der Eigenwertgleichung dem linearen Fall sehr ähnlich. Für  $q > \frac{n+2}{n-2}$  existieren i. Allg. keine Lösungen.

Wie viele geometrisch relevante Differentialgleichungen, so ist auch die Gleichung  $Y(f) = \lambda \cdot f^{p_c-1}$  die Euler–Lagrange-Gleichung eines geometrisch natürlichen Funktionals:

**Lemma 2.8 (Einstein–Hilbert, Yamabe).** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ .

(a) Sei  $q \in [2, \infty)$ . Dann ist die nicht-lineare Eigenwertgleichung

$$Y(f) = \lambda \cdot |f|^{q-2} f \tag{2.8}$$

die Euler–Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$Q_q^g(f) := \frac{\int_M f Y^g(f) \, \text{dvol}^g}{\|f\|_{L^q}^2}$$

bzgl. der Variation von  $f$  in  $\mathcal{C}^\infty(M) \setminus \{0\}$ .

Die obige Aussage bedeutet:  $f$  ist genau dann ein stationärer Punkt von  $Q_q^g(f)$ , wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt, so dass (2.8) erfüllt ist. In diesem Fall haben wir dann

$$\lambda = \frac{Q_q^g(f)}{\|f\|_{L^q}^{q-2}}.$$

(b) Im Spezialfall  $q = p_c = 2n/(n-2)$  gilt für  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit  $f > 0$  und  $\bar{g} := f^{p_c-2} \cdot g$

$$Q_{p_c}^g(f) = Q(\bar{g}) := \frac{\int_M \text{scal}^{\bar{g}} \, d\text{vol}^{\bar{g}}}{\left(\int_M d\text{vol}^{\bar{g}}\right)^{2/p_c}} = Q_{p_c}^{\bar{g}}(1) = Q_{p_c}^{\bar{g}}(C),$$

wobei  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine beliebige Konstante ist. Das Funktional  $\bar{g} \mapsto Q(\bar{g})$  nennt man das **normalisierte Einstein–Hilbert-Funktional**.

Wenn wir über alle  $\bar{g}$  in der konformen Klasse  $[g]$  variieren, und  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $f > 0$  mit  $\bar{g} := f^{p_c-2} \cdot g \in [g]$  identifizieren, so ist die nicht-lineare Eigenwertgleichung

$$Y(f) = \lambda \cdot f^{p_c-1} \quad (2.9)$$

also die Euler–Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$[g] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{g} \mapsto Q(\bar{g}).$$

Gleichung (2.9) ist wiederum äquivalent dazu, dass  $\text{scal}^{\bar{g}}$  konstant ist.

**Bemerkung 2.9.** In obigem Lemma ist der Wert  $q = p_c$  von besonderer Bedeutung. Über obige Gleichung  $Q_{p_c}^g(f) = Q(\bar{g})$  ist  $Q_{p_c}^g$  mit dem Einstein–Hilbert-Funktional verbunden, das in der Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt, wie unten erklärt. Auch für unsere analytischen Überlegungen ist vor allem  $q \leq p_c$ , nahe bei  $p_c$  interessant.

**Bemerkung 2.10 (zur Historie).** Das Funktional

$$\mathcal{SR}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \int_M \text{scal}^g \, d\text{vol}^g,$$

definiert auf dem Raum der semi-riemannschen Metriken  $\mathcal{SR}(M)$  auf  $M$ , genannt das **Einstein–Hilbert-Funktional** oder auch das **Totale-Skalarkrümmungs-Funktional** wurde intensiv von Einstein und Hilbert studiert. Um die Wohldefiniertheit des Integrals einfach zu halten, wollen wir uns auf den Fall einschränken, dass  $M$  geschlossen ist. Eingeschränkt auf den Raum der lorentzischen Metriken betrachten ist das Einstein–Hilbert-Funktional das Wirkungsfunktional in der allgemeinen Relativitätstheorie, in Abwesenheit von Teilchen<sup>1</sup>. Die stationären Punkte des Funktionals auf  $\mathcal{SR}(M)$  sind Ricci-flache semi-riemannsche Metriken, oder äquivalent (in physikalisch geprägten Worten) die Vakuum-Lösungen der Einstein-Gleichungen mit verschwindender kosmologischer Konstante.

Das oben betrachtete volumen-normalisierte Einstein–Hilbert-Funktional  $Q$  wird oft das **volumen-normalisierte Einstein–Hilbert-Funktional** genannt. Der Nenner führt dazu, dass das Funktional skalierungsinvariant ist, d. h.  $Q(tg) = Q(g)$  für alle  $t > 0$ . Betrachtet

<sup>1</sup>Teilchen und Felder auf dem Raum würden weitere Terme ergeben.

man  $Q$  als Funktional auf dem Raum aller riemannschen oder aller semi-riemannschen Metriken, so sind die stationäre Punkte von  $Q$  die Einstein-Metriken, d. h. Metriken für die  $\text{ric}^g = \lambda g$  für eine Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt. Außerdem haben wir obiges Funktional nicht auf dem Raum aller riemannschen Metriken definiert, sondern nur in einer festen konformen Klasse. Dies vergrößert die Menge der stationären Punkte erheblich.

Das Funktional  $Q$  spielt eine zentrale Rolle in [61]. Yamabe wollte für möglichst viele geschlossene Mannigfaltigkeiten durch ein Min-Max-Verfahren für das riemannsche Einstein-Hilbert-Funktional  $Q: \mathcal{R}(M) := \{g \mid g \text{ ist riem. Metrik auf } M\} \rightarrow \mathbb{R}$  die Existenz von stationären Punkten, also von riemannschen Einstein-Mannigfaltigkeiten, zeigen. Der erste Schritt des Verfahrens ist, einen Minimierer von  $Q$  in jeder konformen Klasse auf  $M$  zu finden. Die Suche nach diesem Minimierer, wird die *Lösung des Yamabe-Problems* genannt, das Hauptthema dieses Buchs. Anschließend wollte Yamabe im Raum aller konformen Klassen  $\lambda(M, [g])$  maximieren, um somit einen Sattelpunkt des Funktionals  $Q$  zu finden. Diese Teile konnten aber nicht wie von Yamabe anvisiert realisiert werden, ergaben aber einen Startpunkt für viele interessante mathematische Ergebnisse. Bei den „meisten“ geschlossenen Mannigfaltigkeiten ist bis heute unklar, ob sie Einstein-Metriken tragen.

*Beweis.*

In diesem Beweis seien alle Variablen, Operatoren und andere Terme bzgl.  $g$  definiert, falls keine andere riemannsche Metrik durch einen Index ersichtlich ist.

(a) Den Zähler von  $Q_q^g(f)$  nennen wir  $E^g(f)$ , also

$$E^g(f) := \int_M f Y^g(f) \, \text{dvol}^g = \int_M (a |df|^2 + \text{scal}^g f^2) \, \text{dvol}^g. \quad (2.10)$$

Um die Variation von  $Q_q^g(f) \stackrel{(\text{def})}{=} \frac{E^g(f)}{\|f\|_{L^q}^2}$  berechnen, differenzieren wir zunächst den Zähler  $E^g(f)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E^g(f + th) &= \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a |\nabla(f + th)|^2 + (f + th)^2 \text{scal}^g) \, \text{dvol}^g \\ &= 2 \int_M (a \cdot \langle \nabla f, \nabla h \rangle + f \cdot h \cdot \text{scal}^g) \, \text{dvol}^g \\ &\stackrel{(1.20)}{=} 2 \int_M (a \Delta f + f \cdot \text{scal}^g) \cdot h \, \text{dvol}^g \end{aligned}$$

und dann den Nenner

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\|f + th\|_{L^q})^2 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \int_M |f + th|^q \, \text{dvol}^g \right)^{2/q} \\ &= \frac{2}{q} \left( \int_M |f + 0 \cdot h|^q \, \text{dvol}^g \right)^{(2/q)-1} \cdot \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |f + th|^q \, \text{dvol}^g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{q} \cdot \|f\|_{L^q}^2 \cdot \|f\|_{L^q}^{-q} \cdot q \cdot \int_M |f|^{q-2} f \cdot h \, d\text{vol}^g \\
&= 2 \cdot \|f\|_{L^q}^2 \cdot \|f\|_{L^q}^{-q} \cdot \int_M |f|^{q-2} f \cdot h \, d\text{vol}^g,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass  $q \geq 2$  gilt und deswegen  $\frac{d}{df}|f|^q$  existiert und gleich  $q|f|^{q-2}f$  ist. Zusammen erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Q_q^g(f + th) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \frac{E^g(f + th)}{\|f\|_{L^q}^2} \right) \\
&= \frac{1}{\|f\|_{L^q}^4} \left( \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E^g(f + th) \right) \cdot \|f\|_{L^q}^2 - E^g(f) \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|f + th\|_{L^q}^2 \right) \\
&= \frac{2}{\|f\|_{L^q}^2} \int_M \left( \underbrace{a\Delta f + \text{scal}^g \cdot f}_{=Y(f)} - \|f\|_{L^q}^{-q} \cdot E^g(f) \cdot |f|^{q-2} f \right) \cdot h \, d\text{vol}^g.
\end{aligned}$$

Somit ist  $f$  ein kritischer Punkt von  $Q_q^g$  genau dann, wenn

$$Y(f) - \|f\|_{L^q}^{-q} \cdot E^g(f) \cdot |f|^{q-2} f = 0,$$

also genau dann, wenn  $Y(f) = \frac{E^g(f)}{\|f\|_{L^q}^q} \cdot |f|^{q-2} f$ . Wenn wir also  $\lambda$  wie im Lemma wählen, dann haben also eine Lösung von (2.8).

Umgekehrt, sei nun  $f$  eine Lösung von (2.8) für irgendein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Man rechnet leicht nach, dass dann  $E^g(f) = \lambda \|f\|_{L^q(M)}^q$  bzw.  $Q_q^g(f) = \lambda \|f\|_{L^q(M)}^{q-2}$ . Und nach den obigen Rechnungen ist dann  $f$  ein stationärer Punkt.

- (b) Sei nun  $q = p_c$ ,  $f > 0$  und  $\bar{g} = f^{p_c-2}g$ . Wir definieren wieder  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $e^{2u} = f^{p_c-2}$ . Für das Volumenelement von  $\bar{g}$  finden wir:

$$d\text{vol}^{\bar{g}} = e^{nu} \, d\text{vol}^g = f^{(p_c-2) \cdot (n/2)} \, d\text{vol}^g = f^{p_c} \, d\text{vol}^g,$$

denn  $\frac{p_c}{p_c-2} = \frac{2n}{n-2} \cdot \frac{n-2}{4} = \frac{n}{2}$ . Daher ist

$$\int_M d\text{vol}^{\bar{g}} = \int_M f^{p_c} \, d\text{vol}^g = \|f\|_{L^{p_c}(M,g)}^{p_c}.$$

Für den Zähler von  $Q(\bar{g})$  finden wir:

$$\begin{aligned}
\int_M \text{scal}^{\bar{g}} \, d\text{vol}^{\bar{g}} &= \int_M f^{1-p_c} (a\Delta f + \text{scal}^g \cdot f) \cdot f^{p_c} \, d\text{vol}^g \\
&= \int_M (af\Delta f + f^2 \text{scal}^g) \, d\text{vol}^g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1.20)}{=} \int_M (a|\nabla f|^2 + f^2 \text{scal}^g) \, \text{dvol}^g \\
& = E^g(f).
\end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen des Lemmas folgen direkt aus dem zuvor Gesagten.  $\square$

Wir wiederholen eine Definition aus der Motivation und aus Bemerkung 2.10: eine Riemannsche Metrik ist eine *Einstein-Metrik*, falls  $\text{ric}^g = \lambda g$  für eine Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Eine *Einstein-Mannigfaltigkeit* ist eine (glatte) Mannigfaltigkeit mit einer Einstein-Metrik.

**Bemerkungen 2.11.**

(a) Für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt

$$2 \, \text{div} \, \text{ric} = \nabla \, \text{scal}. \quad (2.11)$$

(b) Für  $M$  zusammenhängend und  $n = \dim(M) \geq 3$  gilt:

$$B = \text{ric} - \frac{\text{scal}}{n} \cdot g = 0 \Leftrightarrow M \text{ ist eine Einstein-Mannigfaltigkeit.}$$

*Beweis.*

(a) Die 2. Bianchi-Identität liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X R(e_i, Z)Y + \nabla_{e_i} R(Z, X)Y + \nabla_Z R(X, e_i)Y, e_i \rangle \\
&= (\nabla_X \text{ric})(Y, Z) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} R(Z, X)Y, e_i \rangle - (\nabla_Z \text{ric})(X, Y).
\end{aligned}$$

Mit  $X = Y = e_j$  erhalten wir durch Summation über  $j$

$$0 = 2 \, \text{div} \, \text{ric}(Z) - \nabla_Z \text{scal},$$

d. h. wir haben (2.11).

(b)  $\Leftarrow$ :  $\text{ric} = \lambda \cdot g$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  impliziert  $\text{scal} = \lambda \cdot n$ , also  $B = \lambda \cdot g - \frac{\lambda n}{n} \cdot g = 0$ .

$\Rightarrow$ : Durch kovariante Ableitung der Gleichung  $n \, \text{ric} = \text{scal} \cdot g$  erhalten wir  $n \, \nabla \, \text{ric} = \nabla \, \text{scal} \otimes g$ , also

$$n \cdot \text{div}(\text{ric}) := n \cdot \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \text{ric})(e_i, \cdot) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \text{scal}) \cdot g(e_i, \cdot) = \nabla \, \text{scal}. \quad (2.12)$$

Aus (2.11) und aus  $n \neq 2$  folgt dann  $\nabla \, \text{scal} = 0$ . Da  $M$  zusammenhängend ist, muss  $\text{scal} \equiv s \in \mathbb{R}$  konstant sein und daher  $\text{ric} = \lambda \cdot g$  mit  $\lambda = \frac{s}{n}$ .

□

**Erinnerung 2.12.** Die Modellräume konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$  sind:

$$\mathbb{M}_\kappa^n := \begin{cases} (S^n, \frac{1}{\kappa} \cdot g_{\text{sph}}), & \kappa > 0 \\ (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}), & \kappa = 0 \\ (\mathbb{H}^n, \frac{1}{|\kappa|} \cdot g_{\text{hyp}}), & \kappa < 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

**Bemerkung 2.13.**

(a) Ist  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ , so gilt:

$(M, g)$  ist lokal isometrisch zu  $\mathbb{M}_\kappa^n \Leftrightarrow (M, g)$  hat konstante Schnittkrümmung  $K \equiv \kappa$ .

(b) Ist  $(M, g)$  eine vollständige zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist die Schnittkrümmung von  $(M, g)$  genau dann konstant gleich  $\kappa$ , wenn die universelle Überlagerung  $\widetilde{M}$  mit der zurückgezogenen Metrik  $\tilde{g}$  isometrisch zu  $\mathbb{M}_\kappa^n$  ist.

*Beweisskizze von (a).*

$\Rightarrow$ : klar.

$\Leftarrow$ : Wähle hinreichend kleine Bälle um Punkte  $p \in M$  und  $q \in \mathbb{M}_\kappa^n$  so dass die riemannschen Exponentialabbildungen Diffeomorphismen sind. Wähle eine lineare Isometrie  $T$  der euklidischen Vektorräume  $T : T_p M \rightarrow T_q \mathbb{M}_\kappa^n$ . Dann ist die Verkettung

$$\begin{array}{ccc} B_r(0) \subset T_p M & \xrightarrow[\cong]{T} & T_q \mathbb{M}_\kappa^n \supset B_r(0) \\ \downarrow \exp_p & & \downarrow \exp_q \\ B_r(p) \subset M & & \mathbb{M}_\kappa^n \supset B_r(q) \end{array}$$

$\exp_q \circ T \circ \exp_p^{-1} : B_r(p) \rightarrow B_r(q)$  ein Diffeomorphismus. Der Nachweis, dass dieser Diffeomorphismus eine Isometrie ist, beruht auf der Beschreibung des Differentials der riemannschen Exponentialabbildung mittels Jacobifeldern. Letztere können im Fall konstanter Schnittkrümmung explizit hingeschrieben werden. □

**Beispiel 2.14.** Flache Tori sind lokal isometrisch zu  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ , aber global nicht einmal homöomorph.

Die relativ starke Bedingung lokaler Isometrie zu  $\mathbb{M}_\kappa^n$  ist also durch die ebenfalls starke Bedingung konstanter Krümmung festgelegt. Eine schwächere Bedingung ist die „lokal“ konformer Äquivalenz. Eine naheliegende Frage ist also: sieht man der Krümmung an, ob eine Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  „lokal“ konform äquivalent zu einem Modellraum  $\mathbb{M}_\kappa^n$

mit  $\kappa \in \mathbb{R}$  ist? Da der Gebrauch des Wortes „lokal“ hier etwas unklar ist, stellen wir die Frage präziser: Gibt es zu jedem  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  und eine offene Menge  $V$ , in einem Modellraum  $\mathbb{M}_\kappa^n$ , so dass  $U$  konform äquivalent zu  $V$ , versehen mit der Metrik von  $\mathbb{M}_\kappa^n$ , ist?

Die folgende Übung zeigt, dass der Wert der Zahl  $\kappa$  hierbei unerheblich ist.

**Übung 2.1.** Zeigen Sie, dass es für  $p \in \mathbb{M}_\kappa^n$  und  $\tilde{p} \in \mathbb{M}_{\tilde{\kappa}}^n$  mit  $\kappa, \tilde{\kappa} \in \mathbb{R}$  Zahlen  $r, \tilde{r} > 0$  und einen konformen Diffeomorphismus

$$B_r^{\mathbb{M}_\kappa^n}(p) \rightarrow B_{\tilde{r}}^{\mathbb{M}_{\tilde{\kappa}}^n}(\tilde{p})$$

gibt.

*Hinweis: Nutzen Sie die stereografische Projektion und das Poincaré'sche Kreisscheiben-Modell des hyperbolischen Raums.*

**Lösung im Fall  $\kappa > 0$ .**

Es genügt den Fall  $\kappa = 1$  zu betrachten, denn die Eigenschaft konform flach zu sein, ist offensichtlich invariant unter Reskalierungen der Metrik.

Sei also  $(S^n, g_{\text{sph}})$  die Standardsphäre und  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$  der Nordpol. Schreibe  $y = (y^0, y^1, \dots, y^n) = (y^0, \hat{y})$ . Die stereografische Projektion im Nordpol  $\sigma : S^n - \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist beschrieben durch  $(0, \sigma(y)) = (0, x) = (1-t)e_0 + ty$ . Damit ist  $0 = (1-t) \cdot 1 + t \cdot y^0$ , also  $t = \frac{1}{1-y^0}$ . Wir erhalten:  $x = t\hat{y} = \frac{\hat{y}}{1-y^0} = \sigma(y)$ .

Um  $(\sigma^{-1})^*g_{\text{sph}}$  zu bestimmen, berechnen wir die Änderung der Länge eines Tangentialvektors  $v \in T_y S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, y \rangle = 0\}$  unter  $\sigma$ . O. B. d. A. sei dazu  $|v| = 1$ . Wir setzen dann  $c(t) = \cos(t) \cdot y + \sin(t) \cdot v$ . Dann ist  $c(t) \in S^n$  für alle  $t$  und  $c(0) = y$ ,  $\dot{c}(0) = v$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned} d\sigma(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma(c(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\cos(t) \cdot \hat{y} + \sin(t) \hat{v}}{1 - \cos(t) \cdot y^0 - \sin(t) \cdot v^0} \\ &= \frac{\hat{v} \cdot (1 - y^0) - \hat{y} \cdot (-v^0)}{(1 - y^0)^2}. \end{aligned}$$

Für die Länge erhalten wir also, unter Beachtung von  $|\hat{v}|^2 = 1 - (v^0)^2$ ,  $|\hat{y}|^2 = 1 - (y^0)^2$  und  $\langle \hat{v}, \hat{y} \rangle = -v^0 y^0$ :

$$\begin{aligned} |d\sigma(v)|^2 &= \frac{|\hat{v}|^2 (1 - y^0)^2 + 2 \langle (1 - y^0) \hat{v}, v^0 \hat{y} \rangle + (v^0)^2 |\hat{y}|^2}{(1 - y^0)^4} \\ &= \frac{(1 - (v^0)^2) (1 - y^0)^2 - 2 (1 - y^0) (v^0)^2 y^0 + (v^0)^2 (1 - (y^0)^2)}{(1 - y^0)^4} \\ &= \frac{(1 - (v^0)^2) (1 - y^0) - 2 (v^0)^2 y^0 + (v^0)^2 (1 + y^0)}{(1 - y^0)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1-y^0)^2}.$$

Als Funktion von  $x$  erhalten wir also:  $x = \frac{\hat{y}}{1-y^0}$ , und damit  $|x|^2 = \frac{1-(y^0)^2}{(1-y^0)^2} = \frac{1+y^0}{1-y^0}$ . Es folgt  $|x|^2 + 1 = \frac{1+y^0+1-y^0}{1-y^0} = \frac{2}{1-y^0}$ , und schließlich

$$(\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} = (1-y^0)^2 \cdot g_{\text{eukl}} = \underbrace{\frac{4}{(|x|^2+1)^2}}_{e^{2u(x)}} \cdot g_{\text{eukl}}.$$

Die Antwort auf obige Frage hängt also gar nicht von  $\kappa$  ab. Wir sollten also fragen: sieht man der Krümmung an, ob eine Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  lokal konform äquivalent  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  ist?

**Definition 2.15.** Eine riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt *konform flach*, falls es zu jedem  $p \in M$  eine Karte  $U \xrightarrow{\varphi} V$  und eine Funktion  $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$  gibt, so dass gilt:

$$g|_U = e^{2u} \cdot \varphi^* g_{\text{eukl}},$$

In anderen Worten:  $(M, g)$  heißt konform flach, falls um jedes  $p \in M$  Koordinaten existieren, in denen gilt:  $g_{ij} = e^{2u} \delta_{ij}$ . Solche Koordinaten nennt man dann *konforme Koordinaten*.

**Bemerkung 2.16.** Für  $n = 2$  besagt ein klassischer Satz, dass es zu jedem Punkt eine konforme Karte gibt, die auf einer Umgebung des Punkts definiert ist. Im Fall  $n = 2$  benutzt man den (klassischen) Begriff „*isotherme Koordinaten*“ äquivalent zum (modernerem) Begriff „konforme Koordinaten“.

**Beispiel 2.17.**  $\mathbb{M}_\kappa^n$  ist konform flach wegen Übung 2.1.

**Definition 2.18.** Seien  $h$  und  $k$  zwei symmetrische Bilinearformen auf einem Vektorraum  $V$ . Das *Kulkarni-Nomizu-Produkt*  $h \odot k$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} (h \odot k)(X, Y, Z, U) &:= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) \\ &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

für  $X, Y, Z, U \in V$ .

**Bemerkungen 2.19.**

- (a)  $h \odot k$  hat dieselben Symmetrien wie der Krümmungstensor  $R$ . In anderen Worten:  $h \odot k \in \mathcal{K}(V)$ , wobei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $\mathcal{K}(V)$  der Raum aller 4-linearen Abbildungen  $V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Symmetrien des Krümmungstensors ist.



Eine Möglichkeit, die obige Aussage zu beweisen, ist durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
 (h \oslash k)(X, Y, Z, U) &= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) \\
 &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\
 &= - (h(Y, U)k(X, Z) + h(X, Z)k(Y, U) \\
 &\quad - h(Y, Z)k(X, U) - h(X, U)k(Y, Z)) \\
 &= - (h \oslash k)(Y, X, Z, U)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (h \oslash k)(X, Y, Z, U) &= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) \\
 &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\
 &= h(Y, Z)k(X, U) + h(X, U)k(Y, Z) \\
 &\quad - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\
 &= h(Z, Y)k(X, U) + h(Z, U)k(Z, Y) \\
 &\quad - h(Z, X)k(U, Y) - h(U, Y)k(Z, X) \\
 &= (h \oslash k)(Z, U, X, Y)
 \end{aligned}$$

sowie die 1. Bianchi-Identität:

$$\begin{aligned}
 &(h \oslash k)(X, Y, Z, W) + (h \oslash k)(Y, Z, X, W) + (h \oslash k)(Z, X, Y, W) \\
 &= h(X, U)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, U) - h(X, Z)k(Y, U) - h(Y, U)k(X, Z) \\
 &\quad + h(Y, U)k(Z, X) + h(Z, X)k(Y, U) - h(Y, X)k(Z, U) - h(Z, U)k(Y, X) \\
 &\quad + h(Z, U)k(X, Y) + h(X, Y)k(Z, U) - h(Z, Y)k(X, U) - h(X, U)k(Z, Y) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ein anderer Beweis ist etwas struktureller. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass  $n := \dim V < \infty$ .

Wir zeigen zunächst den Fall, dass  $h = k$  gilt und dass  $h$  positiv definit ist. Wenn man  $(V, h)$  mit einem Tangentialraum  $T_p \mathbb{S}^n$  der Standard-Sphäre  $\mathbb{S}^n := \mathbb{M}_1^n$  isometrisch identifiziert, so ist der Krümmungs- $(0, 4)$ -Tensor von  $\mathbb{S}^n$  in  $p$  durch  $2h \oslash h$  gegeben. Es folgt  $h \oslash h \in \mathcal{K}(V)$ . Somit gilt für eine positiv definite symmetrische Bilinearform  $g$  und beliebige symmetrische Bilinearformen  $h$  und  $k$  und reelle  $t, s$  nahe 0:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(V) &\ni (g + th) \oslash (g + th) \\
 \mathcal{K}(V) &\ni \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g + tk) \oslash (g + tk) = g \oslash k + k \oslash g = 2g \oslash k \\
 \mathcal{K}(V) &\ni \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g + th) \oslash k = h \oslash k.
 \end{aligned}$$

(b) Für  $n \geq 3$  gilt:

$$K \equiv \kappa \Leftrightarrow \langle R(X, Y)Z, U \rangle = \frac{\kappa}{2} \cdot (g \oslash g)(X, Y, Z, U),$$

(d. h.  $R_4 := \langle R(\bullet, \bullet)\bullet, \bullet \rangle = \frac{\kappa}{2} \cdot g \otimes g$ ), denn die Schnittkrümmung schreibt sich mit  $\otimes$  als  $K(E(X, Y)) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{\frac{1}{2}g \otimes g(X, Y, Y, X)}$ , wobei  $E(X, Y) \subset T_p M$  die von  $X$  und  $Y$  aufgespannte Ebene ist.

**Proposition 2.20.** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Dann gilt für die Weyl-Krümmung  $W \in \Gamma(T^{(1,3)}M)$ :*

$$W_4 := \langle W(\bullet, \bullet, \bullet), \bullet \rangle = R_4 - \frac{\text{scal}}{2n(n-1)} \cdot (g \otimes g) - \frac{1}{n-2} (B \otimes g). \quad (2.15)$$

*Beweisskizze.* Nachzurechnen ist, dass  $g \otimes g$  und  $B \otimes g$  senkrecht auf dem Kern von  $\pi^{\text{ric}}$  stehen, und dass die rechte Seite von (2.15) im Kern von  $\pi^{\text{ric}}$  ist. Dann ist die rechte Seite die Orthogonalprojektion von  $R_4$  auf den Kern von  $\pi^{\text{ric}}$ .  $\square$

**Lemma 2.21.** *Sei  $\dim(M) = n \geq 3$ , und seien  $g$  und  $\bar{g} = e^{2u} \cdot g$  konforme riemannsche Metriken auf  $M$ . Dann ist  $\bar{W} := W^{\bar{g}} = W^g =: W$ .*

*Beweis.* Wir zeigen:  $\bar{W}_4 = e^{2u} W_4$ . Hierzu schreiben wir zunächst (2.2) etwas eleganter als

$$R_4^{\bar{g}} = e^{2u} \left\{ R_4 - \nabla^2 u \otimes g + (\nabla u \otimes \nabla u) \otimes g - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \otimes g \right\}$$

Mit (2.4) und (2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{W}_4 &= \bar{R}_4 - \frac{\overline{\text{scal}}}{2n(n-1)} \bar{g} \otimes \bar{g} - \frac{1}{n-2} \bar{B} \otimes \bar{g} \\ &= e^{2u} \cdot \left\{ R_4 - \nabla^2 u \otimes g + (\nabla u \otimes \nabla u) \otimes g - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 g \otimes g \right\} \\ &\quad - \frac{e^{-2u}}{2n(n-1)} \cdot \left\{ \text{scal} + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|^2 \right\} e^{4u} g \otimes g \\ &\quad - \frac{1}{n-2} \cdot \left\{ B - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n} (\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g \right\} \otimes e^{2u} \cdot g \\ &= e^{2u} \left\{ R_4 - \frac{\text{scal}}{2n(n-1)} g \otimes g - \frac{1}{n-2} B \otimes g \right\} \\ &= e^{2u} W_4. \end{aligned}$$

**Folgerung 2.22 (H. Weyl (1918)).** *Ist  $(M, g)$  konform flach, so ist  $W \equiv 0$ , denn die Krümmung ist eine lokale Größe, und die Weyl-Krümmung  $W$  ist konform invariant.*

Ist diese notwendige Bedingung für konforme Flachheit auch hinreichend?

**Satz 2.23.** *Es gilt:*

$n = 2$ : *Jede Fläche ist konform flach.*

$n = 3$ : *Hier gilt stets  $W \equiv 0$ .*

*Eine 3-Mannigfaltigkeit  $M$  ist konform flach  $\Leftrightarrow \nabla (B + \frac{1}{12} \text{scal} \cdot g)$  ist ein symmetrischer  $(0, 3)$ -Tensor.*

$n \geq 4$ :  *$(M, g)$  konform flach  $\Leftrightarrow W \equiv 0$ .*

Der Beweis des Satzes ist nicht ganz einfach und wir lassen ihn aus Zeitgründen weg. Für einen Beweis verweisen wir auf [40, Kap. 8E, insbes. der Satz 8.31 von Schouten].

**Bemerkung 2.24.** Für  $n \geq 3$  gilt:  $K \equiv \kappa \in \mathbb{R} \Leftrightarrow B \equiv 0$  und  $W \equiv 0$ .

*Beweis.* Aus Bemerkung 2.11 (b) wissen wir bereits  $\text{ric} = \lambda \cdot g \Leftrightarrow B = 0$ .

$\Rightarrow$ : Sei  $K \equiv \kappa \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} R_4 = \frac{\kappa}{2} g \otimes g &\implies \text{ric} = (n-1)\kappa \cdot g \implies B \equiv 0 \\ &\implies \text{scal} = n(n-1)\kappa \\ &\implies W = \frac{\kappa}{2} g \otimes g - \frac{n(n-1)\kappa}{2n(n-1)} g \otimes g = 0. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ : Sei  $B \equiv 0$ , also  $\text{ric} = \lambda \cdot g$  und  $\text{scal} = n \cdot \lambda$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 = W = R_4 - \frac{n \cdot \lambda}{2n(n-1)} g \otimes g &\implies R_4 = \frac{\lambda}{2(n-1)} g \otimes g \\ &\implies K \equiv \frac{\lambda}{n-1}. \end{aligned}$$

## 2.2. Die konforme Gruppe und der erste Satz von Obata

**Erinnerung 2.25.** Die *Isometriegruppe* einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist

$$\text{Isom}(M, g) := \{ \Phi : M \rightarrow M \text{ Diffeomorphismus} \mid \Phi^* g = g \}.$$

Ersetzen wir  $\Phi^*g = g$  durch die schwächere Bedingung, dass  $\Phi$  konform ist, so erhalten wir eine im Allgemeinen größere Gruppe:

**Definition 2.26.** Die *konforme Gruppe* einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist

$$\text{Conf}(M, g) := \{\Phi : M \rightarrow M \text{ Diffeomorphismus} \mid \Phi^*g \in [g]\} .$$

Offensichtlich  $\text{Isom}(M, g) \subset \text{Conf}(M, g)$ .

Im folgenden schreiben wir  $\mathbb{S}^n$  für die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n$  mit der Standardmetrik  $g_{\text{sph}}$ .

**Beispiel 2.27.**

- (a) Wir haben  $\text{Isom}(\mathbb{S}^n) = \text{O}(n+1)$ .
- (b) In einer Übungsaufgabe auf Blatt 10 definieren wir eine konforme Operation von  $\text{O}(n+1, 1)$  auf  $\mathbb{S}^n$ . In anderen Worten wir haben einen Gruppenhomomorphismus  $\text{O}(n+1, 1) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  mit Kern  $\{I_{n+2}, -I_{n+2}\}$ , wobei  $I_m$  die Einheits-Matrix in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  ist. Der Satz von Liouville besagt, dass dieser Gruppenhomomorphismus surjektiv ist. Eine mögliche Referenz für diesen klassischen Satz sind Lecture Notes von Jan Slovák [57, Abschnitt 5 „Conformally flat manifolds“, Seite 46–54], eine weitere findet sich in [17, Abschnitt A.3]. Die Gruppe  $\text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  trägt eine natürliche differenzierbare Struktur, siehe zum Beispiel Punkt (a) der folgenden Bemerkung, und wird dadurch zu einer Lie-Gruppe. Man erhält dann, dass  $\text{O}(n+1, 1) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  eine surjektive glatte Überlagerung mit zwei Blättern ist. Mit der Definition  $\text{PO}(n+1, 1) := \text{O}(n+1, 1)/\{I_{n+2}, -I_{n+2}\}$  erhalten wir also einen Lie-Gruppen-Isomorphismus  $\text{PO}(n+1, 1) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$ , das bedeutet: die Abbildung  $\text{PO}(n+1, 1) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  ist ein Gruppenisomorphismus und auch ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist  $\text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  nicht kompakt.

**Bemerkung 2.28.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (a) Wir versehen  $\text{Conf}(M, g)$  mit der Topologie der gleichmäßigen  $C^\infty$ -Konvergenz, das bedeutet: gleichmäßige  $C^\infty$ -Konvergenz in Normalkoordinaten auf allen Bällen von Radius  $\text{inj}(M, g)/2$ . Dann trägt  $\text{Conf}(M, g)$  eine natürliche differenzierbare Struktur einer endlich-dimensionalen Lie-Gruppe, das heißt einer glatten Mannigfaltigkeit mit einer kompatiblen Gruppen-Struktur. (Ohne Beweis)
- (b)  $\text{Isom}(M, g)$  ist eine Unter-Lie-Gruppe von  $\text{Conf}(M, g)$ , das heißt eine Untermannigfaltigkeit und Untergruppe von  $\text{Conf}(M, g)$ . Mit der induzierten Topologie ist  $\text{Isom}(M, g)$  immer kompakt. (Ohne Beweis, aber nicht aufwändig)
- (c) Man kann zeigen (Beweis etwas aufwändig): Ist  $M$  kompakt und  $(M, g)$  nicht konform äquivalent zu  $\mathbb{S}^n$ , so ist  $\text{Conf}(M, g)$  kompakt.

- (d) Sei nun  $(M, g)$  wieder eine beliebige zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Conf}(M, g)$  kompakt. Wir wählen ein rechts-invariantes Volumen-Maß  $\mu$  auf  $\text{Conf}(M, g)$ . Die Kompaktheit von  $\text{Conf}(M, g)$  impliziert dann die Endlichkeit von  $\mu$ . Daraus folgt die Wohldefiniertheit der riemannschen Metrik

$$g_0 := \int_{\Phi \in \text{Conf}(M, g)} \Phi^* g \, d\mu.$$

Für  $\Psi \in \text{Conf}(M, g)$  gilt dann

$$\begin{aligned} \Psi^* g_0 &= \int_{\Phi \in \text{Conf}(M, g)} \Psi^* \Phi^* g \, d\mu \\ &= \int_{\Phi \in \text{Conf}(M, g)} (\Phi \circ \Psi)^* g \, d\mu \\ &= \int_{\tilde{\Phi} \in \text{Conf}(M, g)} \tilde{\Phi}^* g \, d \underbrace{(R_\Psi)_*(\mu)}_{=\mu} \\ &= g_0, \end{aligned}$$

wobei  $R_\Psi$  Rechtsmultiplikation mit  $\Psi^{-1}$  bedeutet. Somit gilt also  $\text{Conf}(M, g) = \text{Conf}(M, g_0) = \text{Isom}(M, g_0)$ .

**Lemma 2.29 (Lemma von Obata).** *Sei  $M$ ,  $n \geq 3$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit einer Einstein-Metrik  $g_0$ . Ist  $g \in [g_0]$  eine Metrik konstanter Skalarkrümmung, so ist  $g$  ebenfalls eine Einstein-Metrik.*

*Beweis.*

Schreibe  $g_0 = e^{2u} \cdot g = \varphi^{-2} \cdot g$  mit  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $\varphi = e^{-u} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $\varphi > 0$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= -\varphi \cdot \nabla u \\ \nabla^2 \varphi &= -\nabla \varphi \otimes \nabla u - \varphi \cdot \nabla^2 u = \varphi \cdot (\nabla u \otimes \nabla u - \nabla^2 u) \\ \Delta \varphi &= \varphi \cdot (-|\nabla u|^2 - \Delta u). \end{aligned}$$

Da  $g_0$  eine Einstein-Metrik ist, haben wir:

$$\begin{aligned} 0 &= B^{g_0} \\ &\stackrel{(2.5)}{=} B^g - (n-2) (\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n} (\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g \\ &= B^g + (n-2) \varphi^{-1} \left( \nabla^2 \varphi + \frac{1}{n} (\Delta \varphi) \cdot g \right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Für weitere Rechnungen nutzen wir Gleichung (2.17), die im Anschluss an diesen Beweis gezeigt wird.

$$\int_M \varphi |B^g|_g^2 \, \text{dvol}^g = -(n-2) \int_M \left\langle B^g, \nabla^2 \varphi + \frac{1}{n} (\Delta \varphi) \cdot g \right\rangle_g \, \text{dvol}^g$$

$$\begin{aligned}
\langle B^g, g \rangle &\stackrel{\text{tr} B^g = 0}{=} -(n-2) \int_M \langle B^g, \nabla^2 \varphi \rangle_g \, \text{dvol}^g \\
&\stackrel{(2.17)}{=} (n-2) \int_M \langle \text{div} B^g, \nabla \varphi \rangle_g \, \text{dvol}^g \\
&= 0,
\end{aligned}$$

denn nach (2.12) ist  $\text{div} B^g = \text{div}(\text{ric}^g - \frac{\text{scal}^g}{n} \cdot g) = \frac{1}{2} \nabla \text{scal}^g - \frac{1}{n} \nabla \text{scal}^g = 0$ , da  $g$  konstante Skalarkrümmung hat. Aus  $\int_M \varphi |B^g|^2 \, \text{dvol}^g = 0$  folgt direkt  $B^g = 0$ , denn der Integrand ist nicht negativ, und  $\varphi > 0$ . Somit ist  $g$  eine Einstein-Metrik.  $\square$

**Lemma 2.30.** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit (evtl. leerem) Rand  $\partial M$  und  $\nu$  das äußere Einheitsnormalenfeld. Sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare 1-Form und  $h$  ein stetig differenzierbares  $(0, 2)$ -Tensorfeld mit  $\text{supp}(\omega) \cap \text{supp}(h)$  kompakt. Dann gilt:*

$$\int_M \langle \text{div} h, \omega \rangle \, \text{dvol} + \int_M \langle h, \nabla \omega \rangle \, \text{dvol} = \int_{\partial M} \langle h(\nu, \cdot), \omega \rangle \, \text{dvol}^{\partial M}. \quad (2.17)$$

*Beweis.*

Definiere die stetig differenzierbare 1-Form  $\eta$  mit kompaktem Träger durch:

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= \langle h(X, \cdot), \omega \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n h(X, e_i) \omega(e_i),
\end{aligned}$$

wobei  $X \in T_p M$  und  $e_1, \dots, e_n \in T_p M$  eine Orthonormalbasis ist. Die Green'sche Formel (1.19) (mit  $u \equiv 1$ ) liefert:

$$\int_M (\delta \eta) \, \text{dvol} = - \int_{\partial M} \eta(\nu) \, \text{dvol}^{\partial M}.$$

Zur Berechnung von  $\delta \eta$  setze die Orthonormalbasis in  $T_p M$  so zu einer lokalen Orthonormalbasis fort, dass  $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ . Dann gilt in  $p$ :

$$\begin{aligned}
-\delta \eta &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \eta)(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} (\eta(e_i)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \partial_{e_i} (h(e_i, e_j) \omega(e_j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} h)(e_i, e_j) \omega(e_j) + h(e_i, e_j) (\nabla_{e_i} \omega)(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n (\operatorname{div} h)(e_j) \omega(e_j) + \langle h, \nabla \omega \rangle \\
&= \langle \operatorname{div} h, \omega \rangle + \langle h, \nabla \omega \rangle.
\end{aligned}$$

□

**Satz 2.31 (Erster Satz von Obata [46]).** Sei  $M = S^n$ ,  $n \geq 3$ . Ist  $g \in [g_{\text{sph}}]$  eine Metrik konstanter Skalarkrümmung, so gibt es  $C > 0$  und  $\Phi \in \operatorname{Conf}(S^n)$  mit  $g = C \cdot \Phi^* g_{\text{sph}}$ .

*Beweis.*

Da  $g_{\text{sph}}$  eine Einstein-Metrik ist und  $g \in [g_{\text{sph}}]$  konstante Skalarkrümmung hat, besagt Lemma 2.29, dass  $g$  ebenfalls eine Einstein-Metrik ist.

Da die Weyl-Krümmung konform invariant ist, gilt  $W^g = W^{g_{\text{sph}}} = 0$ , also hat nach Bemerkung 2.24 auch  $g$  konstante Schnittkrümmung  $K^g \equiv c \in \mathbb{R}$ . Wäre  $c \leq 0$ , so wäre  $(S^n, g)$  isometrisch zu  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  oder  $(\mathbb{H}^n, |c|^{-1} \cdot g_{\text{hyp}})$ . Es folgt  $c > 0$  und deswegen hat  $g' = c \cdot g$  Schnittkrümmung  $\equiv 1$ . Es gibt also eine Isometrie  $\Phi : (S^n, g') \rightarrow (S^n, g_{\text{sph}})$ . Wegen  $\Phi^* g_{\text{sph}} = g' \in [g_{\text{sph}}]$  gilt  $\Phi \in \operatorname{Conf}(S^n)$ . Außerdem gilt  $g = c^{-1} \Phi^* g_{\text{sph}}$ . □

## 2.3. Stereografische Projektion und die Standard-Blasen auf $\mathbb{R}^n$

Wir diskutieren zunächst die stereografische Projektion aus Übung A.6.

Sei also  $\mathbb{S}^n := (S^n, g_{\text{sph}})$  die Standardsphäre in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$  der Nordpol. Schreibe  $y = (y^0, y^1, \dots, y^n) = (y^0, \hat{y})$ . Die *stereografische Projektion* im Nordpol  $\sigma : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist beschrieben durch  $(0, \sigma(y)) = (0, x) = (1-t)e_0 + ty$ . Damit ist  $0 = (1-t) \cdot 1 + t \cdot y^0$ , also  $t = \frac{1}{1-y^0}$ . Wir erhalten:  $x = t\hat{y} = \frac{\hat{y}}{1-y^0} = \sigma(y)$ .

Um  $(\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}}$  zu bestimmen, berechnen wir die Änderung der Länge eines Tangentialvektors  $v \in T_y S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, y \rangle = 0\}$  unter  $\sigma$ . O. B. d. A. sei dazu  $|v| = 1$ . Wir setzen dann  $c(t) = \cos(t) \cdot y + \sin(t) \cdot v$ . Dann ist  $c(t) \in S^n$  für alle  $t$  und  $c(0) = y$ ,  $\dot{c}(0) = v$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
d\sigma(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma(c(t)) \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\cos(t) \cdot \hat{y} + \sin(t) \hat{v}}{1 - \cos(t) \cdot y^0 - \sin(t) \cdot v^0} \\
&= \frac{\hat{v} \cdot (1 - y^0) - \hat{y} \cdot (-v^0)}{(1 - y^0)^2}.
\end{aligned}$$

Für die Länge erhalten wir also, unter Beachtung von  $|\hat{v}|^2 = 1 - (v^0)^2$ ,  $|\hat{y}|^2 = 1 - (y^0)^2$  und  $\langle \hat{v}, \hat{y} \rangle = -v^0 y^0$ :

$$\begin{aligned}
 |d\sigma(v)|^2 &= \frac{|\hat{v}|^2 (1 - y^0)^2 + 2 \langle (1 - y^0) \hat{v}, v^0 \hat{y} \rangle + (v^0)^2 |\hat{y}|^2}{(1 - y^0)^4} \\
 &= \frac{(1 - (v^0)^2) (1 - y^0)^2 - 2 (1 - y^0) (v^0)^2 y^0 + (v^0)^2 (1 - (y^0)^2)}{(1 - y^0)^4} \\
 &= \frac{(1 - (v^0)^2) (1 - y^0) - 2 (v^0)^2 y^0 + (v^0)^2 (1 + y^0)}{(1 - y^0)^3} \\
 &= \frac{1}{(1 - y^0)^2}.
 \end{aligned}$$

Als Funktion von  $x$  erhalten wir also:  $x = \frac{\hat{y}}{1 - y^0}$ , und damit  $|x|^2 = \frac{1 - (y^0)^2}{(1 - y^0)^2} = \frac{1 + y^0}{1 - y^0}$ . Es folgt  $|x|^2 + 1 = \frac{1 + y^0 + 1 - y^0}{1 - y^0} = \frac{2}{1 - y^0}$ , und schließlich

$$(\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} = (1 - y^0)^2 \cdot g_{\text{eukl}} = \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} \cdot g_{\text{eukl}}.$$

Da  $g_{\text{sph}}$  konstante Skalarkrümmung  $n(n - 1)$ , ist dies auch die Skalarkrümmung von der rechten Seite. Wegen (2.7) sehen wir dann, dass

$$u_1(x) := \left( \frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

eine positive Lösung von  $Y(u_1) = a\Delta u_1 = \lambda u_1^{\frac{n+2}{n-2}}$  ist, mit  $\lambda = \text{scal}^{\mathbb{S}^n} = n(n - 1)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} u_1^{2n/(n-2)} \text{dvol} = \text{vol}(\mathbb{S}^n) =: \omega_n$ .

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, dass euklidische Bewegungen und Dilatationen (= zentrische Streckungen) in  $\mathbb{R}^n$  konforme Abbildungen  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  liefern.

**Beispiel 2.32 (Euklidische Bewegungen).** Zu  $F \in \text{E}(n) = \text{Isom}_{\text{aff}}(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \Phi : S^n &\rightarrow S^n \\
 \Phi(e_0) &:= e_0 \\
 \Phi(y) &:= (\sigma^{-1} \circ F \circ \sigma)(y) \quad \text{für } y \neq e_0.
 \end{aligned}$$

Durch explizites Ausrechnen (vgl. (??)) kann man unschwer sehen, dass  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  auch in  $e_0$  glatt sind und daher  $\Phi \in \text{Diffeo}(S^n)$ . Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned}
 \Phi^* g_{\text{sph}} &= \sigma^* \circ F^* \circ (\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} \\
 &= \sigma^* \circ F^* \left( \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} g_{\text{eukl}} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sigma^* \left( \frac{4}{(|F(x)|^2 + 1)^2} \underbrace{F^* g_{\text{eukl}}}_{g_{\text{eukl}}} \right) \\
&= \sigma^* \left( \frac{(|x|^2 + 1)^2}{(|F(x)|^2 + 1)^2} \cdot \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} g_{\text{eukl}} \right) \\
&= \left( \frac{|\sigma(x)|^2 + 1}{|F(\sigma(x))|^2 + 1} \right)^2 g_{\text{sph}}.
\end{aligned}$$

Somit sind  $\Phi^* g_{\text{sph}}$  und  $g_{\text{sph}}$  konform äquivalent und daher  $\Phi \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{eukl}})$ .

Wir sehen aus dieser Rechnung auch, dass

$$u(x) := \left( \frac{2}{|F(x)|^2 + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

eine positive Lösung von  $\Delta u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$  ist, mit  $\lambda = \frac{1}{4}n(n-2)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \, d\text{vol} = \omega_n$ .

**Beispiel 2.33 (Dilatationen).** Zu  $\alpha > 0$  betrachte die Dilatation  $\delta_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\delta_\alpha(x) := \alpha \cdot x$  und setze

$$\begin{aligned}
\Psi : S^n &\rightarrow S^n \\
\Psi(e_0) &:= e_0 \\
\Psi(y) &:= (\sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma)(y) \quad \text{für } y \neq e_0.
\end{aligned}$$

Wiederum kann man unschwer zeigen, dass  $\Psi \in \text{Diffeo}(S^n)$ . Wir finden

$$(\delta_\alpha^* g)(v, v) = g_{\text{eukl}}(d\delta_\alpha(v), d\delta_\alpha(v)) = g_{\text{eukl}}(v, v)$$

und berechnen damit:

$$\begin{aligned}
\delta_{\alpha^{-1}}^* \circ (\sigma^{-1})^* g_{\text{sph}} &= \delta_{\alpha^{-1}}^* \left( \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} g_{\text{eukl}} \right) \\
&= \frac{4}{(\alpha^{-2}|x|^2 + 1)^2} \alpha^{-2} \cdot g_{\text{eukl}} \\
&= \frac{4\alpha^2}{(|x|^2 + \alpha^2)^2} \cdot g_{\text{eukl}} \\
&= u_\alpha^{p_c-2} \cdot g_{\text{eukl}}
\end{aligned}$$

$$u_\alpha(x) = \left( \frac{2\alpha}{|x|^2 + \alpha^2} \right)^{(n-2)/2}. \quad (2.18)$$

Daraus erhalten wir also:

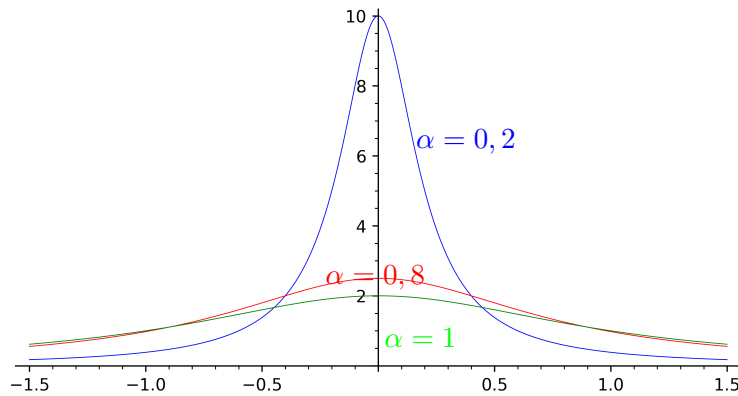
$$\Psi^* g_{\text{sph}} = \sigma^* (u_\alpha^{p_c-2} \cdot g_{\text{eukl}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^* \left( \left( \frac{u_\alpha}{u_1} \right)^{p_c-2} \cdot u_1^{p_c-2} \cdot g_{\text{eukl}} \right) \\
&= \left( \frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma \right)^{p_c-2} \cdot g_{\text{sph}}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Damit ist also  $\Psi \in \text{Conf}(S^n, g_{\text{sph}})$ .

Wir sehen wiederum aus dieser Rechnung auch, dass  $u_\alpha$  eine positive Lösung von  $\Delta u_\alpha = \lambda u_\alpha^{\frac{n+2}{n-2}}$  ist mit  $\lambda = \frac{1}{4}n(n-2)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^{2n/(n-2)} \, d\text{vol} = \omega_n$ .

Die Funktionen  $u_\alpha$  konzentrieren sich für kleine  $\alpha$  nahe 0. Hier sind die Funktionen  $x \mapsto \frac{2\alpha}{|x|^2 + \alpha^2}$  für drei Werte von  $\alpha$  geplottet:



Für  $n = 4$  ist dies der Graph von  $u_\alpha$ , für  $n \neq 4$  muss man die Funktion noch zur Potenz  $(n-2)/2$ , was qualitativ keinen wesentlich Unterschied ergibt.

In den nächsten Abschnitten müssen wir alle positiven Lösungen  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  von  $\Delta u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \, d\text{vol} < \infty$  kontrollieren können. Man kann zeigen, dass es zu jeder solchen Lösung eine euklidische Bewegung  $F \in E(n)$  und Konstanten  $\alpha, c > 0$  gibt mit  $u = c \cdot u_\alpha \circ F$ . Die Aussage ist aber mit den derzeitigen Methoden nicht ganz einfach zu zeigen, deswegen lassen wir sie im Moment unbewiesen, werden sie aber auch nicht verwenden. Wir zeigen dann später eine schwächere Version, die für unsere Zwecke ausreichend ist.

**Übung 2.2.** Zeigen Sie: für die oben definierten Funktionen  $u_\alpha$  gilt  $|\nabla u_\alpha|^2, u_\alpha \Delta u_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und wir haben

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha \Delta u_\alpha \, dx.$$

**Übung 2.3.** Berechnen Sie das Differential von  $\Phi = \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma$  für Translationen  $F$  sowie von  $\Psi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ , jeweils in  $e_0$ .

**Übung 2.4.** Sei  $\sigma : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die stereografische Projektion. Sei  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine positive Funktion, die

$$a\Delta u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \, d\text{vol} < \infty \quad (2.20)$$

auf  $\mathbb{R}^n$  löst.

Zeigen Sie, dass sich dann  $v := \frac{u}{u_1} \circ \sigma : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer schwachen Lösung von  $Y(v) = \lambda v^{\frac{n+2}{n-2}}$  auf  $S^n$  fortsetzt. Hierbei ist  $u_1$  wie oben definiert.

## 2.4. Weitere klassische Sätze der konformen Geometrie

Zu Ende dieses Kapitels wollen wir noch ein paar klassische Sätze der konformen Geometrie erwähnen

**Satz 2.34 (Louisville–Gehring, siehe [26, Theorem 16 auf Seite 389]).** Sei  $n \geq 3$  und  $U \subsetneq S^n$  eine zusammenhängende, offene Teilmenge. Dann besitzt jede konforme Abbildung  $f : U \rightarrow S^n$  eine Fortsetzung zu einer Möbius-Abbildung, d. h. einem Element in  $O(n+1, 1)$ .

**Satz 2.35 (Kuipers Theorem).** Sei  $(M, g)$  eine einfach-zusammenhängende, konform flache riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Dann gibt es eine konforme Immersion  $f : M \rightarrow S^n$ . Ist  $M$  kompakt, dann ist diese Abbildung eine  $f$  ein konformer Diffeomorphismus von  $(M, g)$  nach  $S^n$ .

Beweis: siehe [38], [37]



## 3. Das Yamabe-Problem

In diesem Abschnitt zeigen wir (Folgerung 3.23), dass das Yamabe-Problem gelöst ist, sobald die Aubin-Schoen-Ungleichung

$$\lambda(M, [g]) < n(n-1) \operatorname{vol}(\mathbb{S}^n)^{2/n}$$

gilt, siehe Ungleichung (3.26). Wir sehen auch, siehe Folgerung (3.24), dass für die Sphäre mit der runden konformen Klassen  $\lambda(\mathbb{S}^n) = n(n-1) \operatorname{vol}(\mathbb{S}^n)^{2/n}$  gilt. Die Aubin-Schoen-Ungleichung ist also für die (runde) Sphäre nicht erfüllt; aber wir sehen dann, dass die Standard-Metrik ein Minimierer wie gesucht ist.

Es verbleibt somit noch zu zeigen, dass alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die nicht konform äquivalent zur runden Sphäre sind, die Aubin-Schoen-Ungleichung erfüllen. Wir werden dies zunächst in Kapitel 4 für nicht-konform-flache Mannigfaltigkeiten der Dimension  $\geq 6$  durchführen. Anschließend zeigen wir in Kapitel 5, dass man die verbleibenden Fälle auf das Theorem der positiven Masse zurückführen kann, und wir lösen das Yamabe-Problem vollständig, unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass eine endliche Überlagerung von  $M$  spin ist. Die verbleibenden Fälle (konform-flache Mannigfaltigkeiten der Dimension  $\geq 7$  wurden in [54] gezeigt.

### 3.1. Das ungestörte und gestörte Yamabe-Funktional

Unser Ziel ist die Lösung des Yamabe-Problems. Dies bedeutet: Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Zu bestimmen ist eine zu  $g$  konforme riemannsche Metrik  $\bar{g}$ , die konstante Skalarkrümmung besitzt.

Wir erinnern an folgendes. Die konforme Klasse von  $g$  ist:

$$[g] := \{\bar{g} \mid \bar{g} \text{ konform zu } g\} = \{u^{\frac{4}{n-2}} \cdot g \mid u \in C^\infty(M), u > 0\}.$$

Wir haben gesehen, dass eine Metrik  $\bar{g} \in [g]$  genau dann konstante Skalarkrümmung hat, wenn  $\bar{g}$  ein stationärer Punkt des *Yamabe-Funktional*s

$$Q = Q^M : [g] \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(\bar{g}) := \frac{\int_M \operatorname{scal}^{\bar{g}} \operatorname{dvol}^{\bar{g}}}{\left(\int_M \operatorname{dvol}^{\bar{g}}\right)^{(n-2)/n}}$$

ist. Unser Ziel wird sein, einen Minimierer dieses Funktional zu finden, der dann natürlich auch ein stationärer Punkt des Funktional ist.

Für  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  ist  $Q(c\bar{g}) = Q(\bar{g})$ . Mit  $\bar{g}$  ist also auch  $c\bar{g}$  ein kritischer Punkt für  $Q$ .

**Definition 3.1.** Die *Yamabe-Konstante*

$$\lambda(M, [g]) := \inf \{Q(\bar{g}) \mid \bar{g} \text{ konform zu } g\} \in [-\infty, \infty)$$

ist eine Invariante der konformen Klasse.

**Bemerkung 3.2.** Es erscheint a priori auch naheliegend, den Begriff „Yamabe-Invariante“ an Stelle von „Yamabe-Konstante“ zu verwenden. Dies sollte man aber besser vermeiden, da der Begriff „Yamabe-Invariante“ in den meisten Forschungsarbeiten in einem anderen Sinn verwendet wird.

Um unser geometrisches Minimierungsproblem in ein analytisches Problem umzuformulieren, sei wieder  $p_c = \frac{2n}{n-2}$  und  $a = 4\frac{n-1}{n-2}$ . Der Yamabe-Operator ist  $Y = a\Delta + \text{scal}$ . Wir schreiben oft  $Y^g$  um die Abhängigkeit von der Metrik zu unterstreichen. Wenn wir  $\bar{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g = u^{p_c-2}g$  schreiben, so besagt Folgerung 2.7:

$$Y^{\bar{g}}(w) = u^{1-p_c}Y^g(uw) \quad \forall w \in C^\infty(M).$$

Für  $f \in H^{1,2}(M)$  nutzen wir auch wieder die Bezeichnung

$$E^g(f) := \int_M (a|\nabla f|^2 + f^2 \text{scal}^g) \, \text{dvol}^g.$$

Für  $f \in C^2(M)$  gilt dann  $E^g(f) := \int_M f Y^g(f) \, \text{dvol}^g$ .

**Definition 3.3.** Für  $s \in [2, p_c]$  setzen wir

$$Q_s^g(f) = Q_s^{(M,g)}(f) := \frac{E^g(f)}{\|f\|_{L^s}^2} \quad \text{für } f \in H^{1,2}(M) \setminus \{0\},$$

$$\lambda_s(M, g) := \inf \{Q_s^g(f) \mid f \in H^{1,2}(M) \setminus \{0\}\}.$$

Im folgenden schreiben wir auch  $Q^g(f)$  für  $Q_{p_c}^g(f)$ .

Wir haben in Lemma 2.8 gesehen, dass  $Q_{p_c}^g(u) = Q^g(u) = Q(u^{p_c-2}g)$  für alle positiven  $u \in C^\infty(M)$  gilt. In Lemma 3.5 werden wir sehen, dass  $\lambda_{p_c}(M, g)$  die Yamabe-Konstante  $\lambda(M, [g])$  ist. Ferner hat  $\bar{g} = u^{p_c-2}g$  genau dann konstante Skalarkrümmung  $s_0$  wenn die *Yamabe-Gleichung*  $Y(u) = s_0 \cdot u^{p_c-1}$  gilt. Man beachte, dass  $p_c = 2n/(n-2)$  der sogenannte *kritische* Wert ist, per definitionem der maximale Wert von  $s$ , für den wir noch eine stetige Sobolev-Einbettung  $H^{1,2}(M) \subset L^s(M)$  haben. Diese Sobolev-Einbettung ist für  $s = p_c$  nicht mehr kompakt.

Ist  $s < p_c$ , so nennen wir dies den *subkritischen* oder *gestörten* Fall, insbesondere nennen wir dann  $Q_s^g$  das *subkritische* oder *gestörte Yamabe-Funktional*,  $\lambda_s(M, g)$  die *subkritische* oder *gestörte Yamabe-Konstante* und  $Y(u) = \lambda u^{s-1}$  heißt die *subkritische* oder *gestörte*

**Yamabe-Gleichung.** Die Sobolev-Einbettung  $H^{1,2}(M) \subset L^s(M)$  ist dann kompakt. Um bei den bisherigen Begriffen zu betonen, dass sie nicht gestört sind, fügen wir manchmal zusätzlich das Adjektiv „*ungestört*“ hinzu. Die ungestörte Yamabe-Konstante ist somit  $\lambda(M, [g])$ .

**Bemerkung 3.4.** Das Yamabe-Funktional  $Q$  und das (subkritische) Yamabe-Funktional  $Q_s^g$  sind nach unten beschränkt, denn für den einzigen eventuell negativen Term finden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_M \text{scal}^g \cdot f^2 \, \text{dvol}^g \right| &\leq \| \text{scal}^g \cdot f^2 \|_{L^1} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \| \text{scal}^g \|_{L^{(s/2)^*}} \cdot \| f^2 \|_{L^{s/2}} \\ &= \| \text{scal}^g \|_{L^{(s/2)^*}} \cdot \| f \|_{L^s}^2, \end{aligned}$$

wobei wiederum  $(s/2)^*$  durch

$$\frac{1}{s/2} + \frac{1}{(s/2)^*} = 1$$

definiert ist. Es folgt dass  $Q_s^g(f) \geq -\| \text{scal}^g \|_{L^{(s/2)^*}}$  für alle  $f$ . Insbesondere ist also

$$\lambda(M, [g]) \geq -\| \text{scal}^g \|_{L^{(s/2)^*}} > -\infty.$$

**Lemma 3.5.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_s(M, g) &= \inf \{ Q_s^g(f) \mid f \in C^\infty(M), f \not\equiv 0 \} . \\ &= \inf \{ Q_s^g(f) \mid f \in C^\infty(M), f > 0 \} \end{aligned}$$

für alle  $s \in [2, p_c]$ . Insbesondere gilt  $\lambda(M, [g]) = \lambda_{p_c}(M, g)$ .

*Beweis.*

Setze  $\tilde{\lambda}_s(M, g) := \inf \{ Q_s^g(f) \mid f \in C^\infty(M), f > 0 \}$ . Offensichtlich ist

$$\lambda_s(M, g) \leq \inf \{ Q_s^g(f) \mid f \in C^\infty(M), f \not\equiv 0 \} \leq \tilde{\lambda}_s(M, g),$$

denn

$$\{f \in C^\infty(M) \mid f > 0\} \subset C^\infty(M) \setminus \{0\} \subset H^{1,2}(M) \setminus \{0\}.$$

Zeige also:  $\tilde{\lambda}_s(M, g) \leq \lambda_s(M, g)$ .

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $f \in H^{1,2}(M) \setminus \{0\}$  so dass  $Q_s^g(f) \leq \lambda_s(M, [g]) + \varepsilon$ .

Das Funktional

$$\begin{aligned} Q_s^g : H^{1,2}(M) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f &\mapsto \frac{\int_M (a|\nabla f|^2 + \text{scal} \cdot f^2) \, \text{dvol}}{\|f\|_{L^s}^2}, \end{aligned}$$

ist stetig, denn der Zähler ist offensichtlich stetig bzgl. der  $H^{1,2}(M)$ -Topologie. Der Nenner ist stetig, denn wir haben  $s \leq p_c$ , und  $p_c$  ist der kritische Exponent – das heißt der größte aller Exponenten  $p$ , für die der Sobolev'sche Einbettungssatz 1.15 gerade noch eine stetige Einbettung  $H^{1,2}(M) \subset L^p(M)$  liefert. Da  $\mathcal{C}^\infty(M) \subset H^{1,2}(M)$  dicht ist, existiert also  $h \in \mathcal{C}^\infty(M) \setminus \{0\}$  mit  $|Q_s^g(h) - Q_s^g(f)| \leq \varepsilon$ .

Zu  $\delta > 0$  setze nun  $h_\delta := \sqrt{h^2 + \delta^2} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $h_\delta > 0$ . Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt nun für  $\delta \searrow 0$  unter Nutzung von  $|h/h_\delta| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \|h_\delta\|_{L^s}^2 &\rightarrow \|h\|_{L^s}^2, \\ \int_M \text{scal} \cdot (h_\delta)^2 \, \text{dvol} &\rightarrow \int_M \text{scal} \cdot h^2 \, \text{dvol}, \\ \int_M |\nabla h_\delta|^2 \, \text{dvol} &= \int_M \left| \frac{2h\nabla h}{2h_\delta} \right|^2 \, \text{dvol} \rightarrow \int_M |\nabla h|^2 \, \text{dvol}. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines  $\delta > 0$  ist daher  $|Q_s^g(h_\delta) - Q_s^g(h)| \leq \varepsilon$ . Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_s(M, g) &\leq Q_s^g(h_\delta) \\ &= (Q_s^g(h_\delta) - Q_s^g(h)) + (Q_s^g(h) - Q_s^g(f)) + (Q_s^g(f) - \lambda_s(M, g)) + \lambda_s(M, g) \\ &\leq 3\varepsilon + \lambda_s(M, g). \end{aligned}$$

Der Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert dann  $\tilde{\lambda}_s(M, g) \leq \lambda_s(M, g)$ . □

**Bemerkung 3.6.** Ist die Skalarkrümmung von  $(M, g)$  positiv,  $\text{scal} > 0$ , so gibt es wegen der Kompaktheit von  $M$  eine positive untere Schranke  $\text{scal} \geq C_1 > 0$ . Somit gilt für den Zähler des (gestörten) Yamabe-Funktional

$$E^g(f) \geq \int_M (a|\nabla f|^2 + C_1 \cdot f^2) \, \text{dvol}^g \geq C_2 \cdot \|f\|_{H^{1,2}}^2.$$

Andererseits gilt für  $s \in [2, p_c]$  wegen des Sobolev'schen Einbettungssatzes 1.15

$$\|f\|_{L^s}^2 \leq \|f\|_{L^{p_c}}^2 \text{vol}(M, g)^{\frac{2}{s} - \frac{2}{p_c}} \leq C_3 \cdot \text{vol}(M, g)^{\frac{2}{s} - \frac{2}{p_c}} \cdot \|f\|_{H^{1,2}}^2 \leq C_4 \cdot \|f\|_{H^{1,2}}^2.$$

Damit gilt für das Yamabe-Funktional und alle  $f$

$$Q_s^g(f) \geq \frac{C_2}{C_4}$$

und somit

$$\lambda_s(M, g) \geq \frac{C_2}{C_4} > 0.$$



**Bemerkung 3.7 (Reskalierung der Metrik).** Man rechnet leicht nach, dass für  $\alpha > 0$  gilt:

$$E^{\alpha^2 g}(f) = \alpha^{n-2} E^g(f), \quad \|f\|_{L^s(M, \alpha^2 g)}^s = \alpha^n \|f\|_{L^s(M, g)}^s$$

und deswegen folgt

$$Q_s^{\alpha^2 g}(f) = \alpha^{n-2-2n/s} Q_s^g(f).$$

Für  $s = p_c$  erhalten wir also  $Q^{\alpha^2 g}(f) = Q^g(f)$ .

### 3.2. Unsichtbarkeit von Untermannigfaltigkeiten mit Kodimension $\geq 2$

Für eine Teilmenge  $N \subset M$ , sei wiederum  $d_N(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in N\}$ .

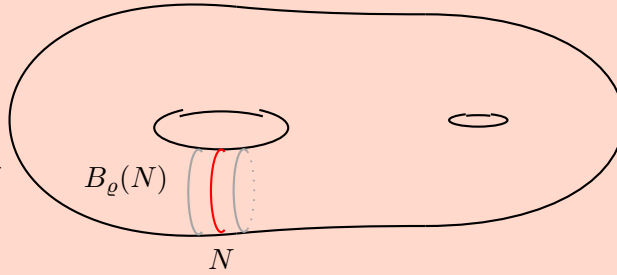
**Proposition 3.8.** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$  und  $N \subset M$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $\geq 2$ . Dann gilt:

$$\lambda(M, [g]) = \inf \left\{ Q^g(f) \mid f \in C^\infty(M) \setminus \{0\}, \exists \varrho > 0 : f|_{B_\varrho(N)} \equiv 0 \right\}.$$

Hierbei ist

$$B_\varrho(N) := \{x \in M \mid d_N(x) < \varrho\}$$

die Tubenumgebung von  $N$  vom Radius  $\varrho$  in  $(M, g)$ .



*Beweis von Proposition 3.8 im Fall von Kodimension  $> 2$ .*

Setze zunächst

$$\lambda'(M, [g]) := \inf \left\{ Q^g(f) \mid f \in C^\infty(M), \exists \varrho > 0 : f|_{B_\varrho(N)} \equiv 0 \right\}.$$

Aus

$$\{f \in C^\infty(M) \mid \exists \varrho > 0 : f|_{B_\varrho(N)} \equiv 0\} \subset C^\infty(M) \subset H^{1,2}(M)$$

folgt dann  $\lambda(M, [g]) \leq \lambda'(M, [g])$ .

Zeige also  $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g])$ . Wähle eine glatte Abschneidefunktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\chi \geq 0$  und

$$\chi(t) \begin{cases} = 0 & \text{für } t \leq 1, \\ \in [0, 1] & \text{für } 1 \leq t \leq 2, \\ = 1 & \text{für } t \geq 2. \end{cases}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit  $Q^g(f) \leq \lambda(M, [g]) + \varepsilon$ . Zu  $\delta > 0$  setze

$$f_\delta(x) := f(x) \cdot \chi\left(\frac{d(x, N)}{\delta}\right).$$

Da  $N \subset M$  kompakt ist, ist für hinreichend kleines  $\delta$  die Funktion  $x \mapsto d(x, N)$  auf der offenen Teilmenge  $B_{2\delta}(N) = \{x \mid 0 < d(x, N) < 2\delta\}$  glatt. Somit ist dann  $f_\delta \in \mathcal{C}^\infty(M)$  und  $f_\delta|_{B_\delta(N)} \equiv 0$ .

Aus majorisierter oder auch aus monotoner Konvergenz folgt  $\|f_\delta\|_{L^p} \xrightarrow{\delta \searrow 0} \|f\|_{L^p}$ . Ebenso folgt aus majorisierter Konvergenz

$$\int_M \text{scal} \cdot f_\delta^2 \, \text{dvol} \xrightarrow{\delta \searrow 0} \int_M \text{scal} \cdot f^2 \, \text{dvol}.$$

Für den  $|\nabla f|$ -Term in  $Q^g$  finden wir:

$$\begin{aligned} & \int_M |\nabla f_\delta|^2 \, \text{dvol} \\ &= \int_M \left| \left( \chi \circ \frac{d_N}{\delta} \right) \cdot \nabla f + f \cdot \left( \chi' \circ \frac{d_N}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \nabla d_N \right|^2 \, \text{dvol} \\ &= \int_{M \setminus B_{2\delta}(N)} |\nabla f|^2 \, \text{dvol} \\ & \quad + \int_{B_{2\delta}(N) \setminus B_\delta(N)} \left| \left( \chi \circ \frac{d_N}{\delta} \right) \cdot \nabla f + f \cdot \left( \chi' \circ \frac{d_N}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \nabla d_N \right|^2 \, \text{dvol}. \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert mit majorisierter oder monotoner Konvergenz gegen  $\int_M |\nabla f|^2 \, \text{dvol}$ . Für den zweiten Term finden wir unter Nutzung von  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ :

$$\begin{aligned} & \int_{B_{2\delta}(N) \setminus B_\delta(N)} \left| \left( \chi \circ \frac{d_N}{\delta} \right) \cdot \nabla f + f \cdot \left( \chi' \circ \frac{d_N}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \nabla d_N \right|^2 \, \text{dvol} \\ & \leq 2 \int_{B_{2\delta}(N) \setminus B_\delta(N)} \left( |\nabla f|^2 + f^2 \cdot \left( \chi' \circ \frac{d_N}{\delta} \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} \right) \, \text{dvol} \\ & \leq C \cdot \int_{B_{2\delta}(N) \setminus B_\delta(N)} \left( 1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \, \text{dvol} \\ & \leq C \cdot \left( 1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \cdot \underbrace{\text{vol}(B_{2\delta}(N))}_{\leq C' \cdot \delta^{\text{codim}(N)}} \\ & \xrightarrow{\delta \searrow 0} 0, \end{aligned}$$

da  $\text{codim}(N) \geq 3$ . Damit gilt  $Q^g(f_\delta) \xrightarrow{\delta \searrow 0} Q^g(f)$ .

Für alle  $\delta > 0$  gilt offensichtlich  $\lambda'(M, [g]) \leq Q^g(f_\delta)$ . Es folgt:

$$\lambda'(M, [g]) \leq \lim_{\delta \searrow 0} Q^g(f_\delta) = Q^g(f) \leq \lambda(M, [g]) + \varepsilon.$$

Der Grenzübergang  $\varepsilon \searrow 0$  liefert wie gewünscht  $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g])$ .  $\square$

*Beweis von Proposition 3.8 im Fall von Kodimension 2.*

Wir definieren  $\lambda'(M, [g])$  wie oben und erhalten dann auch trivialerweise  $\lambda(M, [g]) \leq \lambda'(M, [g])$ .

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, wählen wir wieder  $\varepsilon > 0$  ein  $f \in C^\infty(M)$  mit  $Q^g(f) \leq \lambda(M, [g]) + \varepsilon$ .

Für  $\ell \geq 3$  wählen wir wieder eine glatte Funktion  $\kappa_\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, \ell]$  wie in Gleichung (1.74). Die Funktion  $\chi_{\ell, \delta}$  aus der definierenden Gleichung (1.75) erfüllt dann wiederum für ausreichend kleines  $\delta > 0$  statt  $\varepsilon$  die Gleichung (1.76):

$$\chi_{\ell, \delta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } d_N(x) \leq e^{-\ell} \delta, \\ 1 - \frac{1}{\ell} \log \frac{d_N(x) e^\ell}{\delta} & \text{für } e^{-\ell+1} \delta \leq d_N(x) \leq e^{-1} \delta, \\ 0 & \text{für } d_N(x) \geq \delta. \end{cases}$$

Wir setzen nun  $f_{\ell, \delta} := \chi_{\ell, \delta} \cdot f$ . Aus monotoner bzw. majorisierter Konvergenz folgen wieder  $\|f_{\ell, \delta}\|_{L^p} \xrightarrow{\delta \searrow 0} \|f\|_{L^p}$  und

$$\int_M \text{scal} \cdot f_{\ell, \delta}^2 \, \text{dvol} \xrightarrow{\delta \searrow 0} \int_M \text{scal} \cdot f^2 \, \text{dvol}.$$

unabhängig von der Wahl von  $\ell = \ell(\delta) \geq 3$ . Wir schreiben  $\delta' := e^{-\ell} \delta$ . Um  $\int_M |\nabla f_{\ell, \delta}|^2 \, \text{dvol}$  abzuschätzen, nutzen wir zum einen, dass analog zu oben

$$\int_{B_\delta(N) \setminus B_{\delta'}(N)} |\nabla f|^2 \, \text{dvol} \xrightarrow{\delta \searrow 0} 0$$

für  $\ell = \ell(\delta) \geq 3$  gilt. Zum anderen nutzen wir

$$\begin{aligned} & \int_{B_\delta(N) \setminus B_{\delta'}(N)} |f \cdot \nabla \chi_{\ell, \delta}|^2 \, \text{dvol} \\ & \stackrel{(1.77)}{\leq} \int_{B_\delta(N) \setminus B_{\delta'}(N)} f^2 \cdot \frac{1}{\ell^2} \left| \frac{\nabla d_N}{d_N} \right|^2 \, \text{dvol} \\ & \leq \frac{1}{\ell^2} \sup_{x \in B_\delta(N)} |f(x)|^2 \int_{B_\delta(N) \setminus B_{\delta'}(N)} d_N^{-2} \, \text{dvol} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{\ell^2} \|f\|_{L^\infty}^2 \int_{\delta'}^{\delta} r^{-2+1} dr \\
&\leq \frac{C}{\ell^2} \|f\|_{L^\infty}^2 \underbrace{(\log \delta - \log \delta')}_{=\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Im Limes  $\ell = \delta^{-1} \rightarrow \infty$  gilt somit mit analogen Argumenten wie im Fall von Kodimension  $\geq 3$

$$Q^g(f_{ell,\delta}) \rightarrow Q^g(f) \leq \lambda(M, [g]) + \varepsilon.$$

Und wegen  $f_{ell,\delta}|_{B_{\delta'}(N)} \equiv 0$  folgt  $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g]) + \varepsilon$  und dann im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  letztendlich  $\lambda'(M, [g]) \leq \lambda(M, [g])$ .  $\square$

Betrachte nun  $M = S^n$  mit  $n \geq 3$  und  $N = \{e_0\}$ , so dass  $\text{codim}(N) = n \geq 3$ . Dann ist also

$$\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) = \inf \left\{ Q^{g_{\text{sph}}}(f) \mid f \in C^\infty(M) : \exists \varrho > 0 : f|_{B_\varrho(e_0)} \equiv 0 \right\}.$$

Für ein solches  $f$  finden wir:

$$\begin{aligned}
Q^{g_{\text{sph}}}(f) &= Q^{\sigma^*(u_1^{p_c-2} g_{\text{eukl}})}(f) \\
&= Q^{u_1^{p_c-2} g_{\text{eukl}}}(f \circ \sigma^{-1}) \\
&= Q^{g_{\text{eukl}}}(u_1 \cdot (f \circ \sigma^{-1})) \\
&= Q^{g_{\text{eukl}}}\left(\underbrace{u_1 \cdot (f \circ \sigma^{-1})}_{=: \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Umgekehrt setzt sich auch für jedes beliebige  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  die Verkettung  $(\varphi/u_1) \circ \sigma$  zu einer glatten Funktion auf  $S^n$  fort, die in einer Umgebung von  $e_0$  verschwindet. Damit ist

$$\begin{aligned}
\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) &= \inf \{ Q^{g_{\text{eukl}}}(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \} \\
&= \inf \left\{ a \cdot \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 dx}{\|\varphi\|_{L^{p_c}}^2} \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \right\} \\
&= a \cdot \inf \left\{ \frac{\|\nabla \varphi\|_{L^2}^2}{\|\varphi\|_{L^{p_c}}^2} \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \right\} \\
&= \frac{a}{\sigma_n} \\
&= 4 \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{\sigma_n}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit für die Sobolev-Konstante von  $\mathbb{R}^n$

$$\sigma_n = 4 \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])}. \tag{3.2}$$

**Bemerkung 3.9.** Wir werden in Abschnitt 6.1 sehen, dass die Metriken mit konstanter Schnittkrümmung in  $[g_{\text{sph}}]$  auf  $S^n$  das Yamabe-Funktional  $Q$  minimieren. Daraus folgt dann  $\lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$  und damit auch  $\sigma_n = \frac{4}{n(n-2)}\omega_n^{-2/n}$ . Hierbei ist wieder  $\omega_n$  das Volumen von  $S^n = (S^n, g_{\text{sph}})$ . Wir werden dann in Bemerkung 6.2 sehen, dass in der Ungleichung  $\|\varphi\|_{L^{pc}}^2 \leq \sigma_n \cdot \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$  für die Funktionen  $\varphi = u_\alpha$  Gleichheit gilt.

**Bemerkung 3.10.** Proposition 3.8 ist nicht mehr richtig für Kodimension 1. Als Beispiel betrachten wir den reellen projektiven Raum  $M = \mathbb{R}P^n$ , versehen mit der sphärischen Metrik  $g_{\text{sph}}$  mit der Untermannigfaltigkeit  $N = \mathbb{R}P^{n-1}$ . Dann ist  $(M \setminus N, g_{\text{sph}})$  isometrisch zur oberen Halbspäre und wir werden in !!!!! sehen, dass deswegen

$$\inf \left\{ Q^{g_{\text{sph}}}(f) \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}P^n) \setminus \{0\}, \exists \varrho > 0 : f|_{B_\varrho(N)} \equiv 0 \right\} = \lambda(S^n) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$$

gilt. Gleichzeitig sieht man leicht, dass

$$\lambda(\mathbb{R}P^n, g_{\text{sph}}) \leq Q^{\mathbb{R}P^n, g_{\text{sph}}}(1) = n(n-1) \left( \frac{\omega_n}{2} \right)^{2/n} < n(n-1)\omega_n^{2/n}.$$

### 3.3. Die Aubin-Ungleichung

**Proposition 3.11 (Aubin).** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Dann gilt:*

$$\lambda(M, [g]) \leq n(n-1)\omega_n^{2/n}. \quad (3.3)$$

Wir nennen (3.3) die *Aubin-Ungleichung*. Man sollte sie nicht mit der später diskutierten Aubin-Schoen-Ungleichung verwechseln; letztere ist deutlich aufwändiger zu zeigen. Im Fall  $(M, [g]) = \mathbb{S}^n$  folgt die Aubin-Ungleichung trivialerweise aus

$$\lambda(\mathbb{S}^n) \leq Q^{(S^n, g_{\text{sph}})}(1) = Q^{S^n}(g_{\text{sph}}) = n(n-1)\omega_n^{2/n}. \quad (3.4)$$

Um die Proposition zu zeigen, geben wir zwei Beweise an. Der erste ist — nach den obigen Vorarbeiten — kürzer, und er verallgemeinert sich leicht auf eine große Klasse ähnlicher konformer Invarianten.

Er zeigt die Aussage

$$\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) \leq n(n-1)\omega_n^{2/n}.$$

die zunächst sogar etwas stärker als (3.3) erscheint. Wir sehen aber später (3.27), dass wir hiermit keine bessere Abschätzung als (3.3) erhalten.

Der zweite Beweis enthält Rechnungen und Ideen, die in Kapitel 4 sehr hilfreich sein werden.

*Beweis Nr. 1.*

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  existiert nach Proposition 3.8 ein  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit

$$Q^{g_{\text{eukl}}}(u) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + \varepsilon$$

Wir fixieren ein  $x_0 \in M$  und eine Isometrie  $I : (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) \rightarrow (T_{x_0}M, g_{x_0})$ . Wir erhalten eine Parametrisierung  $\Phi := \exp_{x_0} \circ I$  auf einer kleinen Umgebung von 0, und ihre Inverse  $\varphi := \Phi^{-1}$  definiert auf einem kleinen Ball  $B_\varrho(x_0)$  um  $x_0$  riemannsche Normalkoordinaten mit Basispunkt  $x_0$ . Die Koeffizienten  $g_{ij}(x) := g(d\Phi|_x(e_i), d\Phi|_x(e_j))$  der Metrik  $g$  erfüllen dann für  $|x| \leq \varrho/2$

$$\begin{aligned} |g_{ij}(x) - \delta_{ij}| &\leq C_1 |x|^2, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) - 0 \right| &\leq C_2 |x|, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} g_{ij}(x) - 0 \right| &\leq C_3 \end{aligned}$$

für Konstanten  $C_i \in \mathbb{R}$ . Für  $\alpha \in (0, 1]$  sei  $\delta_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Dilatation mit  $\alpha$ ,  $\delta_\alpha(x) = \alpha x$ . Wir definieren nun  $\Phi^\alpha := \exp_{x_0} \circ I \circ \delta_\alpha$  und  $g_{ij}^\alpha := g(d\Phi^\alpha|_x(e_i), d\Phi^\alpha|_x(e_j))$ . Mit Hilfe der Kettenregel sehen wir  $g_{ij}^\alpha(x) = \alpha^2 g_{ij}(\alpha x)$  und somit für  $|x| \leq \varrho/(2\alpha)$

$$\left| \frac{1}{\alpha^2} g_{ij}^\alpha(x) - \delta_{ij} \right| \leq C_1 \alpha^2 |x|^2, \quad (3.5)$$

$$\left| \frac{1}{\alpha^3} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}^\alpha(x) - 0 \right| \leq C_2 \alpha |x|, \quad (3.6)$$

$$\left| \frac{1}{\alpha^4} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} g_{ij}^\alpha(x) - 0 \right| \leq C_3 \quad (3.7)$$

mit den obigen Konstanten  $C_i \in \mathbb{R}$ . Wir definieren nun auf dem Ball  $B_{\varrho/\alpha}(0) \subset \mathbb{R}^n$  die Metrik  $h^\alpha := \alpha^{-2} (\Phi^\alpha)^* g$ . Wähle nun  $R > 0$  mit  $\text{supp } u \in B_{R/2}(0)$  und dann wähle ein positives  $\alpha < \varrho/R$ . Aus obigen Abschätzungen folgt, dass  $h^\alpha$  auf  $B_R(0)$  für  $\alpha \rightarrow 0$  in der  $C^2$ -Topologie gegen  $g_{\text{eukl}}$  konvergiert. Daraus folgt  $\text{scal}^{h^\alpha} \rightarrow 0$ ,  $|\nabla u|_{h^\alpha}^2 \rightarrow |\nabla u|_{g_{\text{eukl}}}^2$  und  $\text{dvol}^{h^\alpha} \rightarrow \text{dvol}^{g_{\text{eukl}}}$  gleichmäßig auf  $B_R(0)$ . Wir erhalten im Limes  $\alpha \rightarrow 0$

$$Q^{h^\alpha}(u) \rightarrow Q^{g_{\text{eukl}}}(u).$$

Da  $\Phi^\alpha : (B_R(0) \subset \mathbb{R}^n, h^\alpha) \rightarrow (B_{\alpha R}(x_0) \subset M, \alpha^{-2}g)$  eine Isometrie ist, folgt mit Lemma 3.7

$$Q^{h^\alpha}(u) = Q^{\alpha^{-2}g}(u \circ \Phi^\alpha) = Q^g(u \circ \Phi^\alpha).$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\lambda(M, [g]) \leq \lim_{\alpha \searrow 0} Q^g(u \circ \Phi^\alpha) = Q^{g_{\text{eukl}}}(u) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}]) + \varepsilon,$$

und da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\lambda(M, [g]) \leq \lambda(S^n, [g_{\text{sph}}])$ .

Zusammen mit (3.4) ergibt sich die Aussage der Proposition.  $\square$

*Beweis Nr. 2.*

- (a) Wir definieren  $u_\alpha$  wie in Gleichung (2.18) in Abschnitt 2.3, also  $u_\alpha(x) = \left(\frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2}\right)^{(n-2)/2}$  für  $r := |x|$ . Wähle eine glatte Abschnidefunktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\chi(t) \equiv 1$  für  $t \leq 1$ ,  $0 \leq \chi(t) \leq 1$  für  $1 \leq t \leq 2$  und  $\chi(t) \equiv 0$  für  $t \geq 2$ . Für  $\varepsilon > 0$  setze  $f_{\alpha,\varepsilon}(x) := \chi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot u_\alpha(x)$ . Dann ist  $f_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\text{supp}(f_{\alpha,\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}(0)$ . Wir setzen  $A_\varepsilon := B_{2\varepsilon}(0) \setminus B_\varepsilon(0)$  und berechnen damit:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 dx \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} |\nabla u_\alpha|^2 dx + \int_{A_\varepsilon} \left| \chi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\alpha + \chi'\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot dx \cdot u_\alpha \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 dx + C_1 \cdot \int_{A_\varepsilon} \left( |\nabla u_\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot u_\alpha^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Mit  $u_\alpha^2 = \left(\frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2}\right)^{n-2} \leq (2\alpha)^{n-2} r^{2(2-n)}$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} |u_\alpha|^2 dx &\leq (2\alpha)^{n-2} \cdot c_n \cdot \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} r^{4-2n} r^{n-1} dr \\ &= C_2(\varepsilon) \cdot \alpha^{n-2}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} |\nabla u_\alpha| &= \left| \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} \right| = \left| \frac{n-2}{2} \cdot \left(\frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2}\right)^{(n-4)/2} \cdot \left(-\frac{4\alpha r}{(r^2 + \alpha^2)^2}\right) \right| \\ &= (n-2) \cdot \frac{(2\alpha)^{(n-2)/2} r}{(r^2 + \alpha^2)^{n/2}} \\ &\leq (n-2) \cdot (2\alpha)^{(n-2)/2} \cdot r^{-n+1} \end{aligned}$$

finden wir

$$\int_{A_\varepsilon} |\nabla u_\alpha|^2 dx \leq C_3(\varepsilon) \cdot \alpha^{n-2};$$

zusammen also:

$$C_1 \cdot \int_{A_\varepsilon} \left( |\nabla u_\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot u_\alpha^2 \right) dx \leq C_4(\varepsilon) \cdot \alpha^{n-2}.$$

Für den späteren Gebrauch merken wir hier an, dass wir so auch

$$|\nabla u_\alpha| = (n-2) \cdot u_\alpha^{n/(n-2)} \frac{r}{2\alpha} \quad (3.9)$$

sehen. Wir berechnen mit Übung 2.2 und anderen Ergebnissen aus Abschnitt 2.3:

$$\begin{aligned} a \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 dx &= a \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha \Delta u_\alpha dx \\ &= n(n-1) \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^{p_c} dx = n(n-1) \omega_n \\ &= n(n-1) \omega_n^{2/n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^{p_c} dx \right)^{2/p_c} \\ &= n(n-1) \omega_n^{2/n} \cdot \left( \int_{B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^{p_c} dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^{p_c} dx \right)^{2/p_c} \\ &\stackrel{(3.11)}{\leq} n(n-1) \omega_n^{2/n} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\alpha,\varepsilon}|^{p_c} dx + \frac{2^n \omega_{n-1}}{n \varepsilon^n} \cdot \alpha^n \right)^{2/p_c} \\ &= n(n-1) \omega_n^{2/n} \cdot \left( \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2 + \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^n) \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der Index  $\varepsilon$  im Landau-Symbol  $\mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^n)$  bedeutet, dass die Konstante in der Definition des Landau-Symbols von  $\varepsilon$  abhängen darf. In obiger Rechnung haben wir benutzt, dass  $(1+x)^{2/p_c} = 1 + \mathcal{O}(x)$  und dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^{p_c} dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \left( \frac{2\alpha}{|x|^2 + \alpha^2} \right)^n dx \\ &= \omega_{n-1} \cdot \int_\varepsilon^\infty \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^n \cdot r^{n-1} dr \\ &\leq \omega_{n-1} \cdot (2\alpha)^n \cdot \int_\varepsilon^\infty r^{-n-1} dr \\ &= \omega_{n-1} \cdot (2\alpha)^n \cdot \frac{1}{n \varepsilon^n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aus (3.10) bekommen wir also

$$\int_{\mathbb{R}^n} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 dx \leq n(n-1) \omega_n^{2/n} \cdot \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2 + \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^{n-2}), \quad (\alpha \searrow 0).$$

Wir erhalten dann

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 dx}{\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2} \leq n(n-1) \omega_n^{2/n} + \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^{n-2}), \quad (\alpha \searrow 0),$$



denn für  $\alpha \in (0, \varepsilon)$  gilt

$$\begin{aligned}
\|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^{p_c}}^{p_c} &\stackrel{\alpha \leq \varepsilon}{\geq} \int_{B_\varepsilon(0)} |u_\alpha|^{p_c} dx \\
&\geq \int_{B_\alpha(0)} \left( \frac{2\alpha}{|x|^2 + \alpha^2} \right)^n dx \\
&\stackrel{|x| \leq \alpha}{\geq} \int_{B_\alpha(0)} \left( \frac{2\alpha}{2\alpha^2} \right)^n dx \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \cdot \text{vol}(B_\alpha(0)) \\
&\geq C > 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

- (b) Zu  $q \in M$  wähle  $\varepsilon > 0$  so klein, dass auf  $B_{2\varepsilon}(q)$  riemannsche Normalkoordinaten existieren. Setze  $f_{\alpha, \varepsilon} \circ \exp_q^{-1}$  durch 0 zu einer Funktion in  $\mathcal{C}^\infty(M)$  fort, die wir wiederum mit  $f_{\alpha, \varepsilon}$  bezeichnen werden. Wir arbeiten nun in riemannschen Normalkoordinaten um  $q$  und schreiben  $r := d(x, q)$ . Die Norm einer 1-Form  $\alpha$  kann dann bezüglich der euklidischen Norm der Karte oder bezüglich der zurückgezogenen Metrik  $g$  gebildet werden. Sofern eine Unterscheidung notwendig ist, schreiben wir  $|\alpha|_{\text{eukl}}$  bzw.  $|\alpha|_g$ . Im aktuellen Beweis bilden wir allerdings nur die Norm von 1-Formen vom Typ  $dF = \nabla F$ , wobei  $F = F(r)$  eine radiale Funktion ist. In dieser Situation stimmen auf Grund des Gauß-Lemmas  $|dF|_{\text{eukl}}$  und  $|dF|_g$  überein, und wir schreiben dann einfach wieder  $|dF|$ . Es gilt dann auf  $B_\varepsilon(0)$ :

$$|f_{\alpha, \varepsilon}| = \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{(n-2)/2}$$

und analog zur Herleitung von (3.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\nabla f_{\alpha, \varepsilon}| &= \left| \frac{\partial f_{\alpha, \varepsilon}}{\partial r} \right| \\
&= \left| (n-2) \cdot \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n/2} \cdot \frac{r}{2\alpha} \right| \\
&\leq \left| (n-2) \cdot \left( \frac{2\alpha}{r^2} \right)^{n/2} \cdot \frac{r}{2\alpha} \right| \\
&= (n-2) \cdot (2\alpha)^{(n/2)-1} \cdot r^{-n+1} \\
\text{dvol} &= (1 + \mathcal{O}(r)) dx.
\end{aligned}$$

Nun testen wir das Yamabe-Funktional  $Q^g$  auf den Funktionen  $f_{\alpha, \varepsilon}$ . Dazu berechnen wir:

$$\|f_{\alpha, \varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2 = \left( \int_{B_{2\varepsilon}(q)} |f_{\alpha, \varepsilon}|^{p_c} \text{dvol} \right)^{2/p_c}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \int_{B_{2\varepsilon}(q)} |f_{\alpha,\varepsilon}|^{p_c} \cdot (1 + \mathcal{O}(r)) \, dx \right)^{2/p} \\
&= \left( (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \int_{T_q M} |f_{\alpha,\varepsilon}|^{p_c} \, dx \right)^{2/p_c} \\
&= (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \cdot \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\varepsilon}(q)} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 \, d\text{vol} &= \int_{B_{2\varepsilon}(q)} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(r)) \, dx \\
&= (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \cdot \int_{T_q M} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 \, dx \quad (3.13)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\varepsilon}(q)} \text{scal} \cdot f_{\alpha,\varepsilon}^2 \, d\text{vol} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\text{scal}\|_{L^{(p_c/2)^*}(B_{2\varepsilon}(q))} \cdot \|f_{\alpha,\varepsilon}^2\|_{L^{p_c/2}(B_{2\varepsilon}(q))} \\
&\leq \|\text{scal}\|_{L^{(p_c/2)^*}(B_{2\varepsilon}(q))} \cdot \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2.
\end{aligned}$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda(M, [g]) &\leq Q^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \\
&\leq \frac{(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \int_{T_q M} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 \, dx}{(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2} + \|\text{scal}\|_{L^{(p_c/2)^*}(B_{2\varepsilon}(q))} \\
&= (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \cdot \left( n(n-1) \omega_n^{2/n} + \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^{n-2}) \right) + o(1), \quad (3.14)
\end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  und  $o(1)$  im Limes  $\varepsilon \searrow 0$  zu verstehen sind, und zwar gleichmäßig in  $\alpha \in (0, \varepsilon)$ . Im Grenzwert  $\alpha \searrow 0$  ergibt sich

$$\lambda(M, [g]) \leq (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \cdot n(n-1) \omega_n^{2/n} + o(1)$$

und im Grenzwert  $\varepsilon \searrow 0$  schließlich  $\lambda(M, [g]) \leq n(n-1) \omega_n^{2/n}$ .  $\square$

**Bemerkung 3.12.** Die beiden Beweise sind tatsächlich eng verbunden. Aus obigen Rechnungen ergibt sich ja insbesondere  $Q(f_{\alpha,\varepsilon}) \rightarrow n(n-1) \omega_n^{2/n}$ , falls  $\alpha/\varepsilon \rightarrow 0$ . Zusammen mit der Gleichung  $\lambda(\mathbb{S}^n) = n(n-1) \omega_n^{2/n}$ , die wir später sehen werden, ergibt sich dass  $u := f_{\alpha,\varepsilon}$  mit  $\alpha/\varepsilon > 0$  klein, eine geeignete Wahl für  $u$  in Beweis Nr. 1 ist. Beweis Nr. 2 erscheint zunächst aufwändiger; seine Herangehensweise wird jedoch später für stärkere Versionen dieser Abschätzung benötigt. Außerdem benötigt Beweis Nr. 2 die Unsichtbarkeits-Resultate aus Abschnitt 3.2 nicht.

### 3.4. Lösung der subkritischen Gleichung

Das subkritische Yamabe-Funktional ist für uns wichtig, da es im subkritischen Fall viel einfacher ist, zu zeigen, dass es einen Minimierer gibt. Diese Minimierer des subkritischen Problems bilden auch einen wichtigen Teilschritt in der Lösung des Yamabe-Problems: zur Lösung des Yamabe-Problems wollen wir zeigen, dass das ungestörte Yamabe-Funktional einen Minimierer besitzt und wir erhalten diesen ungestörten Minimierer als Limes von gestörten Minimierern. Bevor wir die Existenz dieser Minimierer zeigen, wollen wir zusammenfassen, was wir nun schon gesehen haben.

In Lemma 2.8 in Abschnitt 2.1 haben wir gezeigt:

$$f > 0 \text{ ist kritischer Punkt von } Q_s^g \Leftrightarrow Y(f) = \frac{Q_s^g(f)}{\|f\|_{L^s}^{s-2}} \cdot f^{s-1}. \quad (3.15)$$

Insbesondere gilt: falls  $f > 0$  das Funktional  $Q_s^g$  minimiert und  $\|f\|_{L^s} = 1$  ist, so gilt

$$Y(f) = \lambda_s(M, g) \cdot f^{s-1}. \quad (3.16)$$

Wenn wir Satz 1.75 mit  $a = 4\frac{n-1}{n-2}$  und  $h = \text{scal}^g$  anwenden, so erhalten wir:

**Satz 3.13.** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Sei wieder  $p_c = \frac{2n}{n-2}$  und gegeben seien außerdem  $s \in [2, p_c]$  und  $r > \frac{n}{2}(s-2)$ . Sei  $f \in L^r(M)$  eine schwache Lösung mit  $Y(f) = \lambda \cdot f^{s-1}$  mit  $f \geq 0$ . Dann gilt:*

- (i)  $f \in C^\infty(M)$ .
- (ii)  $f \equiv 0$  oder  $f > 0$ .

*Insbesondere gilt dann die nicht-lineare Eigenwertgleichung  $Y(f) = \lambda \cdot f^{s-1}$  sogar klassisch.*

*Außerdem erhalten wir im folgenden Sinn eine uniforme Schauder-Abschätzung:*

- (iii) *Seien zusätzlich  $K_1, K_2 > 0$  sowie  $0 < \alpha < 1$  gegeben. Es gelte  $r > \frac{n}{2}(s_0 - 2)$ . Dann gibt es eine Konstante  $C = C(M, g, K_1, K_2, \alpha, r, s_0)$ , so dass für jede schwache Lösung  $f \in L^r(M)$  mit  $f \geq 0$  von  $Y(f) = \lambda \cdot f^{s-1}$  mit  $|\lambda| \leq K_1$ ,  $2 \leq s \leq s_0$  und  $\|f\|_{L^r} \leq K_2$  die Abschätzung  $\|f\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$  gilt.*

Der Beweis ist bereits erbracht. □

Wir zeigen nun das Hauptergebnis des Abschnitts.

**Proposition 3.14 (Yamabe).** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Sei  $2 \leq s < p_c = \frac{2n}{n-2}$ . Dann gibt es eine Lösung  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f > 0$  des subkritischen Extremalproblems, und somit gilt  $Q_s^g(f) = \lambda_s(M, g)$  (und ohne Einschränkung ist  $\|f\|_{L^s} = 1$ ).*

Die Teilaussagen (a) und (b) des folgenden Beweises folgen direkt aus Aufgabe 3 auf Blatt 6 für  $w = a^{-1} \cdot \text{scal}^g$ . Die Aufgabe liefert zunächst einen Minimierer  $f \in H^{1,2}(M) \setminus \{0\}$ . Da die minimierende Folge positiv gewählt werden kann, können wir  $f \geq 0$  annehmen.

*Beweis.*

- (a) Wähle eine minimierende Folge  $f_i \in C^\infty(M)$  mit  $Q_s^g(f_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \lambda_s(M, g)$ ; ohne Einschränkung sei  $\|f_i\|_{L^s} = 1$ . Wegen Lemma 3.5 können wir  $f_i > 0$  annehmen. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{H^{1,2}}^2 &= \int_M (|\nabla f_i|^2 + f_i^2) \, \text{dvol} \\ &= \frac{1}{a} \int_M f_i Y^g(f_i) \, \text{dvol}^g + \int_M \left( f_i^2 - \frac{1}{a} \cdot \text{scal}^g \cdot f_i^2 \right) \, \text{dvol} \\ &= \frac{1}{a} \cdot Q_s^g(f_i) + \int_M \left( 1 - \frac{1}{a} \cdot \text{scal}^g \right) \cdot f_i^2 \, \text{dvol} \\ &\leq C_1 + C_2 \cdot \|f_i\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_1 + C_2 \cdot C_3 \cdot \|f_i\|_{L^s}^2 \\ &=: C_4. \end{aligned}$$

Damit ist  $f_i$  beschränkt in  $H^{1,2}(M)$ , und nach Übergang zu einer Teilfolge gilt  $f_i \xrightarrow{H^{1,2}} f$ .<sup>1</sup> Nach dem Kompaktheitssatz 1.26 ist die Einbettung  $H^{1,2}(M) \subset L^s(M)$  kompakt, falls  $1 - \frac{n}{2} > -\frac{n}{s}$ , und dies gilt genau dann, wenn  $s < p_c$ .

Somit bekommen wir mit Bemerkungen 1.24 (a)  $f_i \xrightarrow{L^s} f$  und insbesondere  $\|f\|_{L^s} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\|_{L^s} = 1$ , also  $f \neq 0$ . Aus  $f_i > 0$  erhalten wir  $f \geq 0$ .

- (b) Mit  $f_i \xrightarrow{L^s} f$  gilt auch  $f_i \xrightarrow{L^2} f$  und wir berechnen:

$$\begin{aligned} \|f_i^2 - f^2\|_{L^1} &= \underbrace{(f_i - f)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(f_i + f)}_{\rightarrow 2f} \, L^2 \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

also gilt sogar  $f_i^2 \xrightarrow{L^1} f^2$ . Daraus folgt<sup>2</sup>

$$\int_M \text{scal}^g \cdot f_i^2 \, \text{dvol} \longrightarrow \int_M \text{scal}^g \cdot f^2 \, \text{dvol}.$$

<sup>1</sup>Eine Folge  $f_i$  in einem Hilbertraum  $(H, (\cdot, \cdot))$  heißt *schwach konvergent* bzw. konvergiert *schwach* gegen  $f$ , geschrieben:  $f_i \rightharpoonup f$ , falls für jedes  $\varphi \in H$  gilt:  $(f_i, \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} (f, \varphi)$ .

<sup>2</sup>Das lineare Funktional  $h \mapsto \int_M \text{scal}^g \cdot h \, \text{dvol}$  ist stetig auf  $L^1(M)$ .

Außerdem gilt mit  $f_i \xrightarrow{H^{1,2}} f$  insbesondere  $\nabla f_i \xrightarrow{L^2} \nabla f$  und daher:

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^2}^2 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_M \langle \nabla f_i, \nabla f \rangle \, d\text{vol} \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\nabla f_i\|_{L^2} \cdot \|\nabla f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

also  $\|\nabla f\|_{L^2} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\nabla f_i\|_{L^2}$ . Schließlich ist:

$$\begin{aligned} \lambda_s(M, g) &\leq Q_s^g(f) \\ &= E^g(f) \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} E^g(f_i) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} Q_s^g(f_i) \\ &= \lambda_s(M, g), \end{aligned}$$

also  $Q_s^g(f) = \lambda_s(M, g)$ . Damit erfüllt  $f$  auch die nicht-lineare Eigenwertgleichung  $Y(f) = \lambda_s(M, g) \cdot f^{s-1}$ .

- (c) Wir wenden nun Satz 3.13 mit  $r = s$  an, wobei wir beachten, dass nach Voraussetzung  $s > \frac{n}{2}(s-2)$ , und erhalten  $f \in C^\infty(M)$  und  $f > 0$ .  $\square$

In den kommenden Abschnitten werden wir nun zu jedem  $s < p$  einen Minimierer  $f_s$  von  $Q_s^g$  mit  $\|f_s\|_{L^2} = 1$  hernehmen und deren Konvergenz für  $s \rightarrow p$  studieren.

### 3.5. Monotonie der gestörten Yamabe-Konstanten

Man beachte, dass für geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit  $\lambda(M, [g]) = \lambda_{p_c}(M, g)$  gilt, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt.

**Lemma 3.15 (Aubin).** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ , und sei  $\text{vol}(M, g) = 1$ . Dann ist die Funktion  $[2, p_c] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto |\lambda_s(M, g)|$  monoton fallend. Entweder ist  $\lambda_s(M, g)$  für alle  $s \in [2, p_c]$  negativ oder  $\lambda_s(M, g) \geq 0$  für alle  $s \in [2, p_c]$ . Falls  $\lambda(M, [g]) \geq 0$ , so ist die Funktion  $s \mapsto \lambda_s(M, g)$  linksstetig.*

**Bemerkung 3.16.** Man kann sogar zeigen, dass die Funktion  $[2, p_c] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \lambda_s(M, g)$  stetig ist. Da der Beweis dieser stärkeren Aussage mit unserem aktuellen Wissen nicht einfach zu führen ist und da die Aussage später nicht benötigt wird, werden wir diesen Beweis aber nicht ausführen.

*Beweis.*

- (a) Ist für ein  $s_1 \in [2, p_c]$  die Invariante  $\lambda_{s_1}(M, g) < 0$ , so gibt es ein  $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \setminus \{0\}$  mit  $Q_{s_1}^g(f) < 0$ . Damit ist aber auch  $E^g(f) < 0$ , und folglich  $Q_s^g(f) < 0$  für alle  $s \in [2, p_c]$ . Also ist auch  $\lambda_s(M, g) < 0$  für alle  $s \in [2, p_c]$ .
- (b) Seien  $s_1, s_2 \in [2, p_c]$  mit  $s_1 \leq s_2$ . Für  $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \setminus \{0\}$  ist aufgrund der Normierung des Volumens  $\|f\|_{L^{s_1}} \leq \|f\|_{L^{s_2}}$  und damit:

$$|Q_{s_1}^g(f)| = \frac{|E^g(f)|}{\|f\|_{L^{s_1}}^2} \geq \frac{|E^g(f)|}{\|f\|_{L^{s_2}}^2} = |Q_{s_2}^g(f)|.$$

Im Fall  $\lambda_s(M, g) \geq 0$  erhalten wir hieraus durch Bildung des Infimums auf beiden Seiten  $\lambda_{s_1}(M, g) \geq \lambda_{s_2}(M, g)$ . Im Fall  $\lambda_s(M, g) < 0$  sind nur die Funktionen  $f$  mit  $E^g(f) < 0$  für die Bildung des Infimums relevant. In diesem Fall folgt dann  $\lambda_{s_1}(M, g) \leq \lambda_{s_2}(M, g)$ . Insgesamt also  $|\lambda_{s_1}(M, g)| \geq |\lambda_{s_2}(M, g)|$ .

- (c) Sei nun  $\lambda(M, [g]) = \lambda_{p_c}(M, g) \geq 0$ . Wegen (a) ist  $\lambda_s(M, g) \geq 0$  für alle  $s \in [2, p_c]$ . Sei  $s_0 \in [2, p_c]$  und  $\varepsilon > 0$ . Wähle eine Funktion  $f \in \mathcal{C}^\infty(M) \setminus \{0\}$  so dass  $Q_{s_0}^g(f) < \lambda_{s_0}(M, g) + \varepsilon$ . Die Funktion  $s \mapsto \|f\|_{L^s}$  ist stetig, daher ist für jedes  $s$  nahe  $s_0$  auch  $Q_s^g(f) < \lambda_{s_0}(M, g) + \varepsilon$ . Per definitionem ist  $\lambda_s(M, g) \leq Q_s^g(f)$ . Ist zusätzlich  $s \leq s_0$ , so folgt mit (b), dass  $\lambda_{s_0}(M, g) \leq \lambda_s(M, g) < \lambda_{s_0}(M, g) + \varepsilon$ .

□

**Lemma 3.17.** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  mit Yamabe-Konstante  $\lambda(M, [g])$ . Dann gibt es eine Metrik  $\tilde{g} \in [g]$ , so dass*

$$\begin{aligned} \text{scal}^{\tilde{g}} &> 0 && \text{falls } \lambda(M, [g]) > 0 \\ \text{scal}^{\tilde{g}} &= 0 && \text{falls } \lambda(M, [g]) = 0 \\ \text{scal}^{\tilde{g}} &< 0 && \text{falls } \lambda(M, [g]) < 0 \end{aligned}$$

*Insbesondere ist das Yamabe-Problem im Fall  $\lambda(M, [g]) = 0$  gelöst, und es gilt dann  $\lambda_s(M, g) = 0$  für alle  $s \in [2, p_c]$ .*

*Beweis.*

Die Lösung des subkritischen Problems (Proposition 3.14) impliziert die Existenz eines Minimierers  $f$  von  $Q_2^g$ , der also  $Y(f) = \lambda f$ ,  $f > 0$  mit  $\lambda = \lambda_2(M, g)$  erfüllt. Wir setzen  $\tilde{g} := f^{p_c-2}g$ . Dann gilt

$$\text{scal}^{\tilde{g}} = Y^{\tilde{g}}(1) = f^{1-p_c} Y^g(f) = \lambda f^{2-p_c}.$$

Insbesondere hat  $\text{scal}^{\tilde{g}}$  konstantes Vorzeichen, das mit dem von  $\lambda$  übereinstimmt.

Im Fall  $\lambda(M, [g]) = 0$  impliziert das vorige Lemma von Aubin  $\lambda = \lambda_2(M, g) \geq 0$ . Wäre  $\lambda > 0$ , so würde  $\text{scal}^{\tilde{g}} > 0$  folgen und damit nach Bemerkung 3.6 auch die widersprüchliche Aussage  $\lambda(M, [g]) = \lambda(M, [\tilde{g}]) > 0$ . Somit ist  $\lambda = 0$  und somit  $\text{scal}^{\tilde{g}} = 0$ .

Im Fall  $\lambda(M, [g]) > 0$  ergibt Aubins Lemma  $\lambda > 0$  und somit  $\text{scal}^{\tilde{g}} > 0$ . Analog folgt  $\text{scal}^{\tilde{g}} < 0$  aus  $\lambda(M, [g]) < 0$ .  $\square$

**Bemerkung 3.18.** Angenommen  $(M, g)$  ist wie im Lemma und  $\lambda(M, [g]) = 0$ . Dann ist  $\ker Y^g$  ein-dimensional. Denn für die Funktion  $f$  aus dem obigen Lemma ist  $\tilde{g} := f^{p_c-2}g$  skalar-flach. Wir haben  $Y^{\tilde{g}}(u) = f^{1-p_c}Y^g(fu)$  und deswegen ist  $u \mapsto fu$  ein Vektorraumisomorphismus von  $\ker Y^{\tilde{g}} = \ker \Delta^{\tilde{g}}$  nach  $\ker Y^g$ . Nun gilt für jedes  $u \in \ker \Delta^{\tilde{g}}$  die Aussage  $0 = \int u \Delta^{\tilde{g}} u \, d\text{vol}^{\tilde{g}} = \int |\nabla u|^2 \, d\text{vol}^{\tilde{g}}$ . Deswegen sind die Elemente  $\ker \Delta^{\tilde{g}}$  die lokal konstanten Funktionen. Da  $M$  zusammenhängend ist, folgt  $\ker Y^{\tilde{g}} = \{\lambda f | \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

### 3.6. Aufblasung

Wir studieren nun das Verhalten der Minimierer des subkritischen Yamabe-Funktional im Limes  $s \nearrow p_c$ . Wir folgen hierbei im wesentlichen [55, V §2, Proof of Thm. 2.1].

Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $p_c = 2n/(n-2)$ . Für jedes  $s \in [2, p_c)$  haben wir auf Grund von Proposition 3.14 einen positiven Minimierer  $f_s \in L^s(M)$  von  $Q_s^g$ . Durch Normieren können wir  $\|f_s\|_{L^s} = 1$  erreichen. Es gilt dann

$$f_s > 0, \quad Y(f_s) = \lambda_s f_s^{s-1}, \quad \|f_s\|_{L^s} = 1, \quad \lambda_s = \lambda_s(M, g) = Q_s^g(f_s). \quad (3.17)$$

Die folgende Aussage ist ein wichtiger Schritt zur Lösung des Yamabe-Problems.

**Proposition 3.19.** *Seien  $M, g, n, p_c, s, f_s$  und  $\lambda_s$  wie oben. Angenommen*

$$\sup_{s \in [2, p_c)} \|f_s\|_{L^\infty} = \infty, \quad (3.18)$$

*dann existiert eine nicht-negative Lösung von*

$$a\Delta f = \lambda f^{p_c-1}, \quad \|f\|_{L^{p_c}} = 1, \quad 0 < \lambda \leq \lambda(M, [g]) \quad (3.19)$$

*auf  $\mathbb{R}^n$ .*

Später werden wir sehen, dass es derartige Lösungen auf  $\mathbb{R}^n$  nur dann gibt, wenn  $\lambda = \lambda(M, [g]) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$  und dass dies wieder impliziert, dass  $(M, [g])$  konform äquivalent zu  $\mathbb{S}^n$  ist. Da man das Verhalten der Minimierer von  $Q_s^{g_{\text{sph}}}$  auf  $\mathbb{S}^n$  gut kennt, werden wir also später in diesem Buch sehen, dass  $\sup_{s \in [2, p_c)} \|f_s\|_{L^\infty}$  immer endlich ist, d.h. letztendlich sehen wir, dass die Voraussetzungen der Proposition auf keiner geschlossenen riemannschen Mannigfaltigkeit erfüllt sind.

**Übung 3.1.** Sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und seien  $f_s \in L^s(M)$  Lösungen von (3.17) für  $s \in [2, p_c)$ . Sei  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $[2, p_c)$  mit  $\|f_{s_i}\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie: Dann gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = p_c.$$

*Beweis der Proposition.*

- (a) Es gelte (3.18). Wir haben also eine Folge  $s_i \in [2, p_c)$  mit  $\|f_{s_i}\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$ . Aus der obigen Übung sehen wir, dass dann  $s_i \rightarrow p_c$ .
- (b) Im Fall  $\lambda(M, [g]) = 0$  gilt  $\lambda_s(M, g) = 0$  für alle  $s$  und somit gilt  $Y(f_s) = 0$ . Dann ist  $f_s$  auch ein Minimierer von  $Q_{p_c}^g$ . Dieser Minimierer ist bis auf eine Konstante eindeutig, siehe Bemerkung 3.18. Wir erhalten  $f_s = \|f_2\|_{L^s}^{-1} f_2$ . Wegen  $f_2 \in C^\infty(M)$  ist  $s \mapsto \|f_2\|_{L^s}^{-1}$  beschränkt und somit  $\sup_{s \in [2, p)} \|f_s\|_{L^\infty} < \infty$ . Die Voraussetzung (3.18) der Proposition ist also gar nicht erfüllt.
- (c) Im Fall  $\lambda(M, [g]) < 0$  haben wir  $\lambda_s = \lambda_2(M, g) \leq \lambda(M, [g]) < 0$ . Wir haben dann

$$a\Delta f_s = -\text{scal } f_s + \lambda_s f_s^{s-1} \leq (|\text{scal}| - |\lambda(M, [g])|) f_s^{s-2} f_s.$$

Im Maximum  $x_s$  gilt  $\Delta f_s \geq 0$  und somit

$$\|f_s\|_{L^\infty}^{s-2} = f_s(x_s)^{s-2} \leq \frac{\max |\text{scal}|}{|\lambda(M, [g])|}$$

und somit

$$\limsup_{s \rightarrow p_c} \|f_s\|_{L^\infty} < \infty.$$

Zusammen mit (a) sehen wir, dass die Voraussetzung (3.18) der Proposition auch in diesem Fall gar nicht erfüllt ist.

- (d) Es gelte nun (3.18) und somit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Wir haben also eine Folge  $s_i \in [2, p_c)$  und  $x_i \in M$  mit  $m_i := f_{s_i}(x_i) = \max f_{s_i} \rightarrow \infty$ . Wir wählen  $x_i \in M$  mit  $f_{s_i}(x_i) = \max f_{s_i}$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge<sup>3</sup> gilt  $x_i \rightarrow x_\infty \in M$ . Wir wählen Isometrien  $I_i : (\mathbb{R}, g_{\text{eukl}}) \rightarrow (T_{x_i} M, g_{x_i})$ .

Analog zum Beweis von Proposition 3.11 von Aubin definieren wir für  $\varrho := \text{inj}(M, g)/2$

$$\Phi_i : \underbrace{B_{\varrho/\alpha_i}^{\mathbb{R}^n}}_{\subset \mathbb{R}^n}(0) \rightarrow M, \quad x \mapsto \exp_{x_i}(I_i(\alpha_i x))$$

für reelle Zahlen  $\alpha_i > 0$ , die wir später geeignet wählen. Insbesondere definiert  $(\Phi_i)^{-1}$  um den Faktor  $\alpha_i$  reskalierte Normalkoordinaten mit Zentrum  $x_i$ . Wir definieren auf

<sup>3</sup>Die Teilfolge  $(x_{i_k})$  wird wieder mit  $(x_i)$  notiert, da sonst sukzessives Teilfolgenwählen sehr tief verschachtelte Indizes hervorrufen würde. Wir entfernen also letztendlich alle bis auf abzählbar unendlich viele Folgenglieder aus der Folge.



$B_{\varrho/\alpha_i}^{\mathbb{R}^n}(0)$  die riemannsche Metrik  $\tilde{g}_i := (\alpha_i)^{-2} \Phi_i^* g$ . Für diese Metriken gelten zu (3.5), (3.6) und (3.7) analoge Abschätzungen mit  $C_1, C_2, C_3$ , die unabhängig von  $i$  gewählt werden können. Wir setzen nun für  $x \in B_{\varrho/\alpha_i}^{\mathbb{R}^n}(0)$ :

$$\tilde{f}_i(x) := \frac{1}{m_i} f_{s_i}(\Phi_i(x)).$$

Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} Y^{\tilde{g}_i}(\tilde{f}_i) &= \frac{1}{m_i} Y^{\alpha_i^{-2} \Phi_i^*(g_i)}(f_{s_i} \circ \Phi_i) \\ &= \frac{\alpha_i^2}{m_i} Y^{\Phi_i^*(g_i)}(f_{s_i} \circ \Phi_i) \\ &= \frac{\alpha_i^2}{m_i} Y^{g_i}(f_{s_i}) \circ \Phi_i \\ &= \frac{\alpha_i^2}{m_i} \lambda_{s_i} \left( f_{s_i} \circ \Phi_i \right)^{s_i-1} \\ &= \alpha_i^2 m_i^{s_i-2} \lambda_{s_i} \tilde{f}_i^{s_i-1} \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $\alpha_i := m_i^{-(s_i-2)/2}$  und offensichtlich  $\alpha_i \rightarrow 0$ . Dann erhalten wir

$$Y^{\tilde{g}_i}(\tilde{f}_i) = \lambda_{s_i} \tilde{f}_i^{s_i-1} \quad (3.20)$$

auf  $B_{\varrho/\alpha_i}^{\mathbb{R}^n}(0)$ . Für jedes  $R > 0$  wählen wir nun  $i_0(R) \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\varrho/\alpha_i \geq R$  für alle  $i \geq i_0(R)$ .

- (e) Aufgrund von (3.5), (3.6) und (3.7) konvergieren alle Koeffizienten von  $Y^{\tilde{g}_i}$  in Koordinaten geschrieben auf jedem Ball  $B_R(0)$  für  $i \rightarrow \infty$ ,  $i \geq i_0(R)$  gleichmäßig gegen die Koeffizienten von  $a\Delta$ . Genauer ausgeführt, erhalten wir für die Koeffizienten  $((\tilde{g}_i)_{k,\ell})$  von  $\tilde{g}_i$  dann

$$\begin{aligned} |(\tilde{g}_i)_{k,\ell}(x) - \delta_{k,\ell}| &\leq C_1 \alpha_i^2 |x|^2 \left| \frac{\partial}{\partial x^r} (\tilde{g}_i)_{k,\ell}(x) \right| \leq C_2 \alpha_i^2 |x|, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^s} (\tilde{g}_i)_{k,\ell}(x) \right| &\leq C_3 \alpha_i^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die invertierten Koeffizienten  $(\tilde{g}_i^{k,\ell}) = ((\tilde{g}_i)_{k,\ell})^{-1}$  von  $\tilde{g}_i$  und für die Christoffel-Symbole und deren Ableitung dann

$$\begin{aligned} |(\tilde{g}_i^{k,\ell}(x) - \delta^{k,\ell})| &\leq C_4 \alpha_i^2 |x|^2, \\ |(\Gamma^{\tilde{g}_i})_{k,\ell}^j(x)| &\leq C_5 \alpha_i^2 |x|, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x^s} (\Gamma^{\tilde{g}_i})_{k,\ell}^j(x) \right| &\leq C_6 \alpha_i^2, \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten berechnet sich die Skalarkrümmung wie folgt in Normalkoordinaten, siehe Übung A.8:

$$\text{scal}^{\tilde{g}_i}(\tilde{g}_i)^{jk} R_{\ell jk \ell} = g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \Gamma_{jk}^\ell - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{\ell k}^\ell + \sum_{s=1}^n \Gamma_{jk}^s \Gamma_{\ell s}^\ell - \sum_{s=1}^n \Gamma_{\ell k}^s \Gamma_{js}^\ell,$$

also  $|\text{scal}^{\tilde{g}_i}| \leq C_7 \alpha_i^2$ . Unter Nutzung der Formel (1.17) für den Laplace-Operator in Normalkoordinaten erhalten wir

$$a\Delta(\tilde{f}_i) = \lambda_{s_i} \tilde{f}_i^{s_i-1} + \langle T_{2,i}, \nabla^2 \tilde{f}_i \rangle + \langle T_{1,i}, \nabla \tilde{f}_i \rangle + T_{0,i} \cdot \tilde{f}_i,$$

wobei  $T_{k,i}$  ein symmetrischer  $(k,0)$ -Tensor ist, so dass für geeignete Konstanten  $C_k$  für die punktweisen Normen gilt

$$|T_{2,i}| \leq C_8 \alpha_i^2 |x|^2, \quad |T_{1,i}| \leq C_9 \alpha_i^2 |x|, \quad |T_{0,i}| \leq C_{10} \alpha_i^2$$

- (f) Aufgrund der offensichtlichen Relation  $0 < \tilde{f}_i(x) \leq \tilde{f}_i(0) = 1$  erhalten wir für  $i \geq i_0(R)$  die Abschätzung  $\|\tilde{f}_i\|_{L^\infty} \leq 1$ . Dies impliziert, dass  $\tilde{f}_i \in L^{2p_c}(B_{\varrho/\alpha_i}^{\mathbb{R}^n}(0))$ . Wir wenden nun die lokale Version von Satz 1.75 an, siehe Bemerkung 1.77, für  $r := 2p_c$ ,  $s_0 := p_c$ ,  $s := s_i$  und  $\Omega = B_R(0) \Subset B_{2R}(0)$ ,  $i \geq i_0(2R)$  und  $\alpha \in (0,1)$  beliebig. Wir erhalten ein  $C(R, \alpha) > 0$  mit  $\|\tilde{f}_i\|_{C^{2,\alpha}(B_R(0))} \leq C(R, \alpha)$ . Wir wählen ein  $\alpha' \in (0, \alpha)$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert  $\tilde{f}_i$  in der  $C^{2,\alpha'}$ -Topologie auf  $B_1(0)$  gegen eine Grenzfunktion  $\tilde{f}_\infty: B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Zu einer Teilfolge hiervon erhalten wir Konvergenz in der  $C^{2,\alpha'}$ -Topologie auf  $B_2(0)$ , gegen eine Erweiterung  $\tilde{f}_\infty: B_2(0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir setzen dies iterativ für alle  $R \in \mathbb{N}$  fort und wählen eine Diagonalfolge, die dann auf allen Kompakta in  $\mathbb{R}^n$  in der  $C^{2,\alpha'}$ -Topologie gegen  $\tilde{f}_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Aus  $\tilde{f}_i > 0$  folgt  $\tilde{f}_\infty \geq 0$ . Auf Grund von (3.5), (3.6) und (3.7) konvergieren alle Koeffizienten von  $Y^{\tilde{g}_i}$  in Koordinaten geschrieben auf jedem Ball gleichmäßig gegen die Koeffizienten von  $a\Delta$ . Zusammen mit der  $C^{2,\alpha'}$ -Konvergenz der  $\tilde{f}_i$  erhalten wir dann aus (3.20) für  $i \rightarrow \infty$ :

$$a\Delta \tilde{f}_\infty = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{s_i}\right) \tilde{f}_\infty^{p_c-1} = \lambda(M, [g]) \tilde{f}_\infty^{p_c-1} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.$$

Aufgrund von (3.5) konvergiert  $\text{dvol}^{\tilde{g}_i}$  auf  $B_R(0)$  in der  $C^0$ -Topologie gegen das euklidische Volumenelement.<sup>4</sup> Wir rechnen und nehmen dann den Grenzwert  $i \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_M f_{s_i}^{s_i} \text{dvol}^g \\ &\geq \int_{B_{\alpha_i R}^M(x_i)} f_{s_i}^{s_i} \text{dvol}^g \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Man betrachtet hierbei  $\text{dvol}^{\tilde{g}_i}|_{B_R(0)}$  als Schnitt des Bündels  $|\Lambda^n T^*M|$ . Dies bedeutet also:  $\sqrt{\det((\tilde{g}_i)_{k\ell})_{k\ell}}$  konvergiert auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen 1.

$$\begin{aligned}
&= \alpha_i^n \int_{B_R^{\mathbb{R}^n}(0)} (f_{s_i} \circ \Phi_i)^{s_i} \, d\text{vol}_i^{\tilde{g}} \\
&= m_i^{-n(s_i-2)/2} m_i^{s_i} \int_{B_R^{\mathbb{R}^n}(0)} \tilde{f}_{s_i}^{s_i} \, d\text{vol}_i^{\tilde{g}} \\
&\stackrel{(*)}{\geq} \int_{B_R^{\mathbb{R}^n}(0)} \tilde{f}_{s_i}^{s_i} \, d\text{vol}_i^{\tilde{g}} \\
&\rightarrow \int_{B_R^{\mathbb{R}^n}(0)} \tilde{f}_\infty^{p_c} \, d\text{vol}^{g_{\text{eukl}}}
\end{aligned}$$

Für die Ungleichung  $(*)$  haben wir benutzt, dass  $s_i \geq n(s_i - 2)/2$  äquivalent zu  $s_i \leq p_c$  ist, und wir haben dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $m_i \geq 1$  angenommen. Es gilt somit  $\|\tilde{f}_\infty\|_{L^{p_c}} \leq 1$ , andererseits folgt aus  $\tilde{f}_\infty(0) = 1$  und der Stetigkeit von  $\tilde{f}_\infty$  auch  $\|\tilde{f}_\infty\|_{L^{p_c}} > 0$ . Wir normalisieren nun die  $L^{p_c}$ -Norm:

$$f := \frac{1}{\|\tilde{f}_\infty\|_{L^{p_c}}} \tilde{f}_\infty.$$

Es folgt auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$a\Delta f = \underbrace{\lambda(M, [g])}_{\lambda :=} \|\tilde{f}_\infty\|_{L^{p_c}}^{p_c-2} f^{p_c-1},$$

und wegen  $\lambda \leq \lambda(M, [g])$  ist somit alles gezeigt.  $\square$

### 3.7. $L^{p_c}$ -Lösungen der Yamabe-Gleichung auf $\mathbb{R}^n$

Unser Ziel ist nun, die nicht-negativen Lösungen der Yamabe-Gleichung, also von (3.19), gut zu verstehen. Diese Gleichung besagt:

$$a\Delta u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \, d\text{vol} < \infty \quad (3.21)$$

**Lemma 3.20.** *Sei  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine nicht-negative Lösung von (3.21) auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $u \not\equiv 0$ .*

*Dann ist  $\lambda > 0$  und es gilt*

$$\lambda \left( \int_{\mathbb{R}^n} u^{2n/(n-2)} \, d\text{vol} \right)^{2/n} = n(n-1) \omega_n^{2/n}. \quad (3.22)$$

*Beweis.*

Sei  $\sigma : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die stereografische Projektion. Nach Übung 2.4 setzt sich  $\frac{u}{u_1} \circ \sigma : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer schwachen Lösung von  $Y(v) = \lambda v^{\frac{n+2}{n-2}}$  auf  $S^n$  fort. Man rechnet nach, dass

$$V := \int_{S^n} v^{\frac{2n}{n-2}} \, \text{dvol}^{S^n} = \int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, \text{dvol}^{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

also ist  $v \geq 0$  in  $L^{p_c}(S^n)$ . Wegen Lemma 1.78 haben wir  $v \in L^r(S^n)$  für ein  $r > 0$ . Aus Satz 3.13 folgt dann  $v \in C^\infty(S^n)$  und  $v > 0$ , auch in  $e_0$ . Für die Metrik  $\bar{g} := v^{p_c-2} g_{\text{sph}} = \sigma^*(u^{p_c-2} g_{\text{eukl}})$  berechnen wir die Skalarkrümmung als

$$\begin{aligned} \text{scal}^{\bar{g}} &= \text{scal}^{u^{p_c-2} g_{\text{eukl}}} \circ \sigma \\ &= u^{1-p_c} \underbrace{Y^{g_{\text{eukl}}}(u)}_{=\Delta} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Da die Skalarkrümmung konstant ist, sagt der Satz 2.31 von Obata, dass  $(S^n, \bar{g})$  konstante Schnittkrümmung  $\lambda/(n(n-1)) > 0$  besitzt, also isometrisch ist zu einer runden Sphäre von Radius  $r := \sqrt{n(n-1)/\lambda}$ . Ihr Volumen ist zum einen  $r^n \omega_n$ , zum anderen aber nach obiger Rechnung gleich  $V$ . Wir erhalten also

$$V^{2/n} = \omega_n^{2/n} \frac{n(n-1)}{\lambda}$$

und diese Gleichung ist äquivalent zu (3.22).  $\square$

**Beispiel 3.21.** Man rechnet leicht nach, dass (3.22) für  $u = u_\alpha$  erfüllt ist. Wir erwähnen ohne Beweis und ohne es später zu verwenden, dass dies bis auf Translation, Dilatation und Multiplikation mit Konstanten die einzigen nicht-negativen Lösungen von (3.21) sind.

### 3.8. Lösung des Yamabe-Problems

Wir studieren nun die Konvergenz der subkritischen Lösungen, was zu einer Lösung des Yamabe-Problems führen wird, vorausgesetzt eine Ungleichung ist erfüllt.

**Satz 3.22.** *Sei  $M$  eine geschlossene zusammenhängende riemannische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $p_c = 2n/(n-2)$ . Seien wieder für  $s \in [2, p_c)$  Minimierer  $f_s$  des subkritischen Funktionals  $Q_s^g$  wie in (3.17) gegeben. Sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Falls*

$$\lambda(M, [g]) < n(n-1) \omega_n^{2/n}, \quad (3.23)$$

*dann gilt*

$$\sup_{s \in [2, p_c)} \|f_s\|_{C^{2,\alpha}} < \infty. \quad (3.24)$$

Es gibt dann eine Folge  $s_i \rightarrow p_c$ , so dass  $f_s$  in  $C^2$  gegen einen positiven glatten Minimierer  $f$  von  $Q_{p_c}^g$  konvergiert.

*Beweis.*

(a) Wir zeigen zunächst

$$\sup_{s \in [2, p)} \|f_s\|_{L^\infty} < \infty. \quad (3.25)$$

Wenn (3.25) nicht gilt, so erhalten wir mit der Aufblasung (Proposition 3.19) eine Lösung von (3.19). Nach der vorangehenden Folgerung ist hierbei

$$n(n-1)\omega_n^{2/n} = \lambda \leq \lambda(M, [g]).$$

(Mit der Proposition 3.11 von Aubin sehen wir sogar, dass  $\lambda(M, [g]) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$ .) Obige Ungleichung widerspricht (3.23).

(b) Aus (3.25) und  $\|f_s\|_{L^s} = 1$  folgt die Beschränktheit in  $L^r$  für alle  $p_c < r < \infty$ . Mit Satz 3.13 (iii) ergibt sich dann (3.24).

(c) Aus der Beschränktheit der  $f_s$  in  $C^{2,\alpha}$  folgt die Existenz einer Folge  $s_i \rightarrow p$ , so dass  $f_{s_i}$  in  $C^2$  gegen eine Grenzfunktion  $f \in C^2(M)$  konvergiert,  $f \geq 0$ . Im Grenzwert folgt dann aus Gleichung (3.17)

$$Y(f) = \lambda f^{p_c-1}, \quad \|f\|_{L^{p_c}} = 1, \quad f \geq 0$$

für  $\lambda = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{s_i}$ . Aus dem Lemma 3.15 von Aubin folgt  $\lambda = \lambda(M, [g])$ , falls  $\lambda(M, [g]) \geq 0$ , und  $\lambda \leq \lambda(M, [g])$ , falls  $\lambda(M, [g]) < 0$ .

(d) Wir berechnen dann

$$Q_{p_c}^g(f) = E^g(f) = \int_M f Y^g(f) \, d\text{vol}^g = \lambda \|f\|_{L^{p_c}}^{p_c} = \lambda \leq \lambda(M, [g]) \leq Q_{p_c}^g(f),$$

das heißt  $f$  ist ein Minimierer des ungestörten Funktionals  $Q_{p_c}^g$ .

(e) Aus Satz 3.13 mit  $r > p_c$  beliebig erhalten wir  $f > 0$  und  $f \in C^\infty(M)$ .

□

**Folgerung 3.23.** Das Yamabe-Problem für  $(M, g)$  ist gelöst, falls

$$\lambda(M, [g]) < n(n-1)\omega_n^{2/n}. \quad (3.26)$$

Es gibt dann eine Metrik  $\bar{g} \in [g]$  mit konstanter Skalarkrümmung und  $Q(\bar{g}) = \lambda(M, [g])$ .

Diese Folgerung ist nun klar.  $\square$

**Folgerung 3.24.** Für  $n \geq 3$  und  $\mathbb{S}^n = (S^n, g_{\text{sph}})$  gilt

$$\lambda(\mathbb{S}^n) = n(n-1)\omega_n^{2/n}. \quad (3.27)$$

*Beweis.*

Es gilt  $Q(g_{\text{sph}}) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$ , somit folgt  $\lambda(\mathbb{S}^n) \leq n(n-1)\omega_n^{2/n}$ . Wir wollen nun aus der Annahme  $\lambda(\mathbb{S}^n) < n(n-1)\omega_n^{2/n}$  einen Widerspruch herleiten. Mit der obigen Folgerung sehen wir in diesem Fall, dass es eine Metrik  $\bar{g} \in [g_{\text{sph}}]$  geben muss, die  $Q$  in  $[g_{\text{sph}}]$  minimiert. Wir können hierbei  $\text{vol}(S^n, \bar{g}) = \omega_n$  annehmen. Die Metrik  $\bar{g}$  hat also konstante Skalar-Krümmung und ist somit nach dem Satz 2.31 von Obata isometrisch zu  $\mathbb{S}^n$ . Durch Rechnung erhält man den Widerspruch  $Q(\bar{g}) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$ .  $\square$

Metriken mit  $Q(g) = \lambda(M, [g])$  (und damit mit konstanter Skalar­krümmung) nennt man *Yamabe-Metriken*. Die Ungleichung

$$\lambda(M, [g]) < \lambda(\mathbb{S}^n) \quad (3.28)$$

nennen wir die *Aubin–Schoen-Ungleichung*, da Aubin sie in vielen Fällen gezeigt hat und da Schoen sie in den verbleibenden Fällen mit Hilfe des Satzes von der positiven Masse gezeigt hat.

Die folgenden Kapitel des Skripts zeigen, dass jede zusammenhängende geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ , die Aubin–Schoen-Ungleichung erfüllt, es sei denn  $(M, [g])$  ist konform äquivalent zu  $\mathbb{S}^n$ .

## 4. Die Aubin–Schoen-Ungleichung im Fall

$$W \not\equiv 0 \text{ und } n \geq 6$$

In diesem Kapitel zeigen wir die Aubin–Schoen-Ungleichung unter den Annahmen  $W \not\equiv 0$  und  $n \geq 6$ . In diesem Fall konnte Aubin [9] bereits 1976 mit Hilfe lokaler Testfunktionen diese Ungleichung zeigen.

### 4.1. Beweis mit konformen Normalkoordinaten

Das Ziel dieses Kapitels ist also die Ungleichung

$$\lambda(M, [g]) < \lambda(\mathbb{S}^n) = n(n-1)\omega_n^{2/n} \quad (4.1)$$

im Fall  $W \not\equiv 0$  und  $n \geq 6$  zu zeigen. Oder äquivalent ausgedrückt: Ist  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 6$ , so ist  $(M, g)$  entweder konform flach oder es gilt (4.1).

Hierbei ist der Wert von  $\lambda(\mathbb{S}^n)$  bereits bekannt, siehe (3.27), und die Ungleichung in der obigen Formel ist zu zeigen, was im wesentlichen die zuvor diskutierte Ungleichung (3.26) ist.

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass (4.1) sogar immer dann gilt, wenn  $(M, [g])$  nicht konform zu  $\mathbb{S}^n$  ist. Diese Erweiterung wurde von Schoen [50] gezeigt unter Nutzung ganz anderer Techniken.

Hieraus ergibt sich dann die vollständige Lösung des Yamabe-Problems. Ist  $(M, [g])$  konform zu  $\mathbb{S}^n$ , so wird das Problem von der Standard-Metrik auf  $\mathbb{S}^n$  gelöst. Ist  $(M, [g])$  nicht konform zu  $\mathbb{S}^n$ , so besagt (4.1), dass die Voraussetzung von Folgerung 3.23 erfüllt sind und dann folgt die Lösung des Problems.

Das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis von (4.1) im zuerst genannten Fall sind konforme Normalkoordinaten.

**Satz 4.1 (Konforme Normalkoordinaten).** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ . Sei  $N \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann gibt es eine Metrik  $\bar{g} \in [g]$ , so dass in geeigneten Koordinaten  $x$  um  $x_0$  mit  $x(x_0) = 0$  gilt:*

$$\det \bar{g}_{ij}(x) \equiv 1 \quad (4.2)$$

$$\text{scal}^{\bar{g}}(x) = \mathcal{O}(r^2) \quad (4.3)$$

$$\Delta^{\bar{g}} \text{scal}^{\bar{g}}(x_0) = \frac{1}{6} |W(x_0)|^2. \quad (4.4)$$

Zudem stimmt die Taylor-Entwicklung der Metrik  $\bar{g}$  in obigen Koordinaten bis zur Ordnung  $N$  mit der Taylor-Entwicklung der Metrik  $\bar{g}$  in riemannschen Normalkoordinaten (bzgl.  $\bar{g}$ ) überein.

Der Satz wird erst im kommenden Abschnitt bewiesen.

**Bemerkung 4.2.** Die Gleichung (4.4) ist eine invariante Bedingung, die überhaupt nicht von den Koordinaten abhängt. Gleiches gilt für (4.3), denn diese Bedingung besagt gerade, dass  $\text{scal}(x_0) = 0$  und  $\nabla \text{scal}(x_0) = 0$ . Die Bedingung (4.2) hingegen hängt von der Wahl der verwendeten Koordinaten ab.

**Bemerkung 4.3.** Satz 4.1 kann wie folgt verstärkt werden: [28, 29, 21]

Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ . Dann gibt es eine Metrik  $\bar{g} \in [g]$ , so dass in  $\bar{g}$ -Normalkoordinaten  $x$  um  $x_0$  mit  $x(x_0) = 0$  die Gleichungen (4.2) bis (4.4) gelten.

Diese stärkere Version wird aber in unserer Vorlesung nicht benötigt, ist etwas aufwändiger zu zeigen und wird deswegen auch nicht bewiesen.

Wir erhalten daraus nun das folgende Ergebnis.

**Satz 4.4 (Aubin, 1976 [9]).** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 6$ , und sei  $M$  nicht konform flach.

(i) Für jedes  $x_0 \in M$  mit  $W(x_0) \neq 0$  und jedes  $\varrho > 0$  gilt: es gibt eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow [0, \infty)$  mit Träger in  $B_\varrho(x_0)$ ,  $f \not\equiv 0$ , so dass  $Q_{p_c}^g(f) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ .

(ii) Es gilt

$$\lambda(M, [g]) < \lambda(\mathbb{S}^n).$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen das folgende Lemma.

**Lemma 4.5.** Für  $k, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq 2$  und  $\alpha, \varepsilon > 0$  setze

$$I(\alpha) := I_{n,k,\varepsilon}(\alpha) := \int_0^\varepsilon r^k \cdot \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr.$$

Dann ist

$$0 < \hat{C} \leq \frac{I(\alpha)}{F(\alpha)} \leq \check{C} < \infty \quad (\alpha \searrow 0),$$

wobei  $\hat{C}$  und  $\check{C}$  von  $k, n$  und  $\varepsilon$  abhängen können und wobei

$$F(\alpha) := \begin{cases} \alpha^{k+2} & \text{für } n > k + 4 \\ \alpha^{k+2} \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) & \text{für } n = k + 4 \\ \alpha^{n-2} & \text{für } n < k + 4. \end{cases}$$



Das Symbol  $\alpha \searrow 0$  bedeutet hierbei: für positive  $\alpha \leq \alpha_0(k, n, \varepsilon)$ .

*Beweis von Lemma 4.5.* Für  $I(\alpha)$  finden wir:

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= \int_0^\varepsilon \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{k+n-1} dr \\
 &\stackrel{r=\alpha s}{=} \int_0^{\varepsilon/\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\alpha^2 s^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot (\alpha s)^{k+n-1} \alpha ds \\
 &= \alpha^{k+2} \cdot \int_0^{\varepsilon/\alpha} \left( \frac{2}{s^2 + 1} \right)^{n-2} \cdot s^{k+n-1} ds \\
 &= \alpha^{k+2} \cdot \left( c_{k,n} + \int_1^{\varepsilon/\alpha} \left( \frac{2}{s^2 + 1} \right)^{n-2} \cdot s^{k+n-1} ds \right).
 \end{aligned}$$

Für  $s \geq 1$  ist  $s^2 \leq s^2 + 1 \leq 2s^2$  und somit ist  $I(\alpha)$  vergleichbar<sup>1</sup> mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\alpha) &= \alpha^{k+2} \cdot \left( c_{k,n} + \int_1^{\varepsilon/\alpha} (s^{-2})^{n-2} \cdot s^{k+n-1} ds \right) \\
 &= \alpha^{k+2} \cdot \left( c_{k,n} + \int_1^{\varepsilon/\alpha} s^{k-n+3} ds \right) \\
 &= \alpha^{k+2} \cdot \left( c_{k,n} + \begin{cases} [\log(s)]_1^{\varepsilon/\alpha} & \text{für } k = n - 4 \\ \left[ \frac{s^{k-n+4}}{k-n+4} \right]_1^{\varepsilon/\alpha} & \text{sonst} \end{cases} \right).
 \end{aligned}$$

Wir stellen fest:

- Für  $n > k + 4$  ist  $\tilde{F}(\alpha)$  vergleichbar mit  $\alpha^{k+2}$ .
- Für  $n = k + 4$  ist  $\tilde{F}(\alpha) = \alpha^{k+2} (c_{k,n} + \log(\frac{\varepsilon}{\alpha})) = \alpha^{k+2} (c_{k,n,\varepsilon} + \log(\frac{1}{\alpha}))$ , also vergleichbar mit  $\alpha^{k+2} \log(\frac{1}{\alpha})$ .
- Für  $n < k + 4$  schließlich ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\alpha) &= \frac{\varepsilon^{k-n+4}}{k-n+4} \cdot \alpha^{k+2+n-k-4} + c'_{k,n} \cdot \alpha^{k+2} \\
 &= \frac{\varepsilon^{k-n+4}}{k-n+4} \cdot \alpha^{n-2} + c'_{k,n} \cdot \alpha^{k+2},
 \end{aligned}$$

also vergleichbar mit  $\alpha^{n-2}$ , da  $n - 2 < k + 2$ . □

<sup>1</sup>Dies soll heißen, dass  $I(\alpha)/\tilde{F}(\alpha)$  nach unten und nach oben durch positive Konstanten beschränkt wird für  $\alpha \searrow 0$ .

Die Idee des Beweises des obigen Satzes ist es nun, Beweis Nr. 2 von Proposition 3.11 zu verfeinern.

*Beweis von Satz 4.4.* Aus (i) folgt offensichtlich (ii), deswegen fixieren wir einen Punkt  $x_0 \in M$  mit  $|W(x_0)| \neq 0$  und zeigen (i).

- (a) Gemäß dem Satz über konforme Normalkoordinaten 4.1 können wir ohne Einschränkung (nach eventueller konformer Änderung der Metrik) annehmen, dass in geeigneten Koordinaten  $x$  mit  $x(x_0) = 0$  gilt:  $g_{ij} \equiv 1$ , also  $\text{dvol} = dx$  und  $\text{scal} = \mathcal{O}(r^2)$  mit  $r = |x|$ , sowie  $\Delta \text{scal}(x_0) = \frac{1}{6}|W(x_0)|^2 > 0$ . In diesen Koordinaten setze wie in Beweis Nr. 2 von Proposition 3.11  $f_{\alpha,\varepsilon}(x) := \chi(\frac{|x|}{\varepsilon}) \cdot u_\alpha(x)$ , wobei  $u_\alpha(x) = \left(\frac{2\alpha}{|x|^2 + \alpha^2}\right)^{(n-2)/2}$  und  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(R)$  mit  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi(t) \equiv 0$  für  $t \leq 1$  und  $\chi(t) \equiv 0$  für  $t \geq 2$ . Wir verfahren zunächst wie im Beweis Nr. 2 von Proposition 3.11. Wie in diesem Beweis bereits angesprochen, kann die punktweise Norm einer 1-Form bezüglich der euklidischen Norm der Karte gebildet werden oder bezüglich der zurückgezogenen Norm. Wenn Unterscheidung notwendig ist, schreiben wir wieder  $|\cdot|_{\text{eukl}}$  bzw.  $|\cdot|_g$ . Da wir nun nicht mehr in Normalkoordinaten arbeiten, müssen diese Normen auch bei Differentialen radialer Funktionen unterschieden werden. Allerdings ist der Unterschied gut kontrolliert

$$1 - \mathcal{O}(r^{N+1}) \leq \frac{|\alpha|_g}{|\alpha|_{\text{eukl}}} \leq 1 + \mathcal{O}(r^{N+1}) \quad \forall \alpha \in T^*M, \alpha \neq 0.$$

Analog dazu bildet diese Karte Bälle  $B_r^g(x_0)$  in der  $g$ -Distanz nicht genau, sondern nur approximativ, auf Bälle der euklidischen Norm  $B_r^{\text{eukl}}(0)$  ab. Offensichtlich kann man aber  $\varepsilon > 0$  so klein wählen, dass  $B_{2\varepsilon}^{\text{eukl}}(0) \subset x(B_\varepsilon^g(0))$ , wir haben also  $\text{supp } f_{\alpha,\varepsilon} \subset B_\varepsilon^g(x_0)$ . Teil (a) im Beweis Nr. 2 von Proposition 3.11 können wir wortwörtlich übernehmen, da alle Normen, Abstände und Volumenformen bezüglich der euklidischen Norm der Karte zu verstehen sind. Bei den Abschätzungen  $|\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|$  in Teil (b), insbesondere in (3.13) ist eine Unterscheidung nötig. Der Faktor  $1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$  aus der Volumenkorrektur tritt hingegen nicht mehr auf, da ja  $\text{dvol} = dx$ . Außerdem bezeichnet  $B_\varepsilon(x_0)$  nun ausnahmsweise nicht den geodätischen Abstandsball um  $x_0$ , sondern die Menge der Punkte  $y \in M$  mit  $|x(y)|_{\text{eukl}} < \varepsilon$ . Dies ist im vorliegenden Fall nicht genau dasselbe, da  $x$  nicht genau die riemannschen Normalkoordinaten sind und somit  $r$  nicht genau der geodätische Abstand. Allerdings wird dieser Unterschied nicht weiter stören.

Gleichung (3.13) wird nun zu

$$\begin{aligned} \int_{B_{2\varepsilon}(q)} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|_g^2 \, \text{dvol} &= \int_{B_{2\varepsilon}(q)} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|_{\text{eukl}}^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(r^{N+1})) \, dx \\ &= \int_{T_q M} a |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|_{\text{eukl}}^2 \, dx + \varphi_{N,\varepsilon}(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei  $\varphi_{N,\varepsilon}(x)$  ein Term mit der Abschätzung

$$\varphi_{N,\varepsilon}(x) \leq c_{N,\varepsilon} \int_{T_q M} r^{N+1} |\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|_{\text{eukl}}^2 dx \quad (4.6)$$

ist, für eine Konstante  $c_{N,\varepsilon} \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Wir erhalten:

$$Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) + \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^{n-2}) + \frac{\int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} \text{scal} \cdot f_{\alpha,\varepsilon}^2 \, \text{dvol} + \varphi_{N,\varepsilon}(x)}{\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2}.$$

- (b) Wir werden nun sehen, dass  $\varphi_{N,\varepsilon}(x)$  für großes  $N$  ebenfalls wie  $\mathcal{O}_\varepsilon(\alpha^{n-2})$  gegen Null konvergiert. Alle Konstanten im folgenden können von  $\varepsilon$  und  $N$  abhängen, aber nicht von  $\alpha$  und  $r \in (0, 2\varepsilon)$ . Alle Normen  $|\cdot|$  in Unterpunkt (b) sind bezüglich der euklidischen Norm. Wie in den Rechnungen zu (3.8) sehen wir, dass für  $0 \leq r \leq 2\varepsilon$  gilt:

$$|\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 \leq C_1 \left( |\nabla u_\alpha|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} u_\alpha^2 \right).$$

Aus (3.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\nabla u_\alpha|^2 &\leq C_2 u_\alpha^{2n/(n-2)} \frac{r^2}{\alpha^2} \\ &\leq C_2 u_\alpha^2 \underbrace{\left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \frac{r}{\alpha} \right)^2}_{\leq 2/r} \leq 4C_2 \frac{u_\alpha^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $|\nabla f_{\alpha,\varepsilon}|^2 \leq C_3 \frac{u_\alpha^2}{r^2}$  und somit

$$\begin{aligned} \varphi_{N,\varepsilon}(x) &\leq C_4 \int_0^{2\varepsilon} r^{N+1} \cdot \frac{u_\alpha^2}{r^2} \cdot r^{n-1} dr \\ &= C_4 \int_0^{2\varepsilon} r^{N-1} \cdot \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} dr \\ &= C_4 I_{n,N-1,2\varepsilon}(\alpha) \in \mathcal{O}_{\varepsilon,N}(\alpha^{n-2}), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 4.5 mit  $N \geq n-2$  angewandt haben.

In Abschätzung (3.12) haben wir gezeigt, dass  $\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}} \geq C^{1/p_c} > 0$  für  $\alpha \searrow 0$  und die dort eingeführte Konstante  $C > 0$ . Hieraus folgt nun

$$\frac{\varphi_{N,\varepsilon}(x)}{\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2} \in \mathcal{O}_{\varepsilon,N}(\alpha^{n-2}).$$

(c) Im Ringgebiet  $A_\varepsilon := B_{2\varepsilon}(x_0) \setminus B_\varepsilon(x_0)$  schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{A_\varepsilon} \text{scal} \cdot f_{\alpha,\varepsilon}^2 \, \text{dvol} \right| &\leq C_5 \cdot \int_{A_\varepsilon} u_\alpha^2(x) \, dx \\
 &\leq C_6 \cdot \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} r^{n-1} \, dr \\
 &\leq C_6 \cdot \int_\varepsilon^{2\varepsilon} r^{4-2n} (2\alpha)^{n-2} r^{n-1} \, dr \\
 &\leq C_6 \frac{2^{n-2} \varepsilon^{4-n}}{n-4} \alpha^{n-2}.
 \end{aligned}$$

Wir nutzen wieder (3.12), also  $\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}} \geq C^{1/p_c} > 0$  für  $\alpha \searrow 0$ . Damit ergibt sich wie in der Begründung zu (3.14) und den Ergebnissen von (a) und (b):

$$Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) + \mathcal{O}_{\varepsilon,N}(\alpha^{n-2}) + \frac{\int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 \, \text{dvol}}{\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2}. \quad (4.7)$$

(d) Nun berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 \|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^{p_c} &\leq c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon} \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{p_c \frac{(n-2)}{2}} \cdot r^{n-1} \, dr \\
 &= c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon} \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^n \cdot r^{n-1} \, dr \\
 &\stackrel{r=\alpha \cdot s}{=} c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon/\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\alpha^2 s^2 + \alpha^2} \right)^n \cdot (\alpha s)^{n-1} \alpha \, ds \\
 &= 2^n c_n \cdot \int_0^{2\varepsilon/\alpha} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right)^n s^{n-1} \, ds \\
 &\leq 2^n c_n \cdot \left( c'_n + \int_1^{2\varepsilon/\alpha} s^{-n-1} \, ds \right) \\
 &= 2^n c_n \cdot \left( c'_n + \left[ \frac{s^{-n}}{-n} \right]_1^{2\varepsilon/\alpha} \right) \\
 &= 2^n c_n \cdot \left( c'_n + \frac{1}{n} - \frac{(2\varepsilon/\alpha)^{-n}}{n} \right) \\
 &\leq 2^n c_n \cdot \left( c'_n + \frac{1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Für  $C' := (2^n c_n (c'_n + 1/n))^{-2/p_c} > 0$  gilt also

$$\frac{1}{\|f_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^{p_c}}^2} \geq C'.$$

Im Fall  $\int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 \, \text{dvol} < 0$  erhalten wir deswegen aus (4.7) die verbesserte Ungleichung

$$Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) + \mathcal{O}_{\varepsilon,N}(\alpha^{n-2}) + C' \cdot \int_{B_\varepsilon(x_0)} \text{scal} \cdot u_\alpha^2 \, \text{dvol}. \quad (4.8)$$

- (e) Da wir  $N \geq n - 2 \geq 4$  gewählt haben, ist in konformen Normalkoordinaten die Taylor-Entwicklung der Funktion  $\text{scal}$  um  $x_0$ :

$$\text{scal}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j + \mathcal{O}(r^3).$$

Damit berechnen wir Nutzung von Übung 4.1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j \cdot u_\alpha^2 \, \text{d}x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^\varepsilon \int_{|x|=r} \left( \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j \, \text{dvol}^{S^{n-1}(r)} \right) \cdot \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} \, \text{d}r \\ &\stackrel{(4.9)}{=} \frac{\gamma_n}{2} \cdot \int_0^\varepsilon (-\Delta \text{scal})|_{x_0} \cdot r^2 \cdot \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} \, \text{d}r \\ &= -\frac{\gamma_n}{12} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \int_0^\varepsilon r^2 \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} \, \text{d}r. \end{aligned}$$

- (f) Mit Lemma 4.5 erhalten wir damit für  $N \geq n - 2$ , für positive Konstanten  $C_7$  und  $C_8$  und für ausreichend kleine positive  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{\partial^2 \text{scal}}{\partial x^i \partial x^j}(0) x^i x^j \cdot u_\alpha^2 \, \text{d}x \\ &= -\frac{\gamma_n}{12} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \int_0^\varepsilon r^2 \left( \frac{2\alpha}{r^2 + \alpha^2} \right)^{n-2} \cdot r^{n-1} \, \text{d}r \\ &\leq \begin{cases} -C_7 \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 & \text{für } n \geq 7 \\ -C_8 \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) & \text{für } n = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \mathcal{O}(r^3) \cdot u_\alpha^2 dx &\leq C_9 \cdot I_{n,3,\varepsilon}(\alpha) \\ &\leq C_{10} \cdot \begin{cases} \alpha^5 & \text{für } n \geq 8 \\ \alpha^5 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) & \text{für } n = 7 \\ \alpha^4 & \text{für } n = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

- Für  $n \geq 8$  finden wir:

$$Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) - C_{11} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 + \mathcal{O}_{\varepsilon,N}(\alpha^5).$$

- Für  $n = 7$  finden wir:

$$Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) - C_{12} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 + \mathcal{O}_{\varepsilon,N}\left(\alpha^5 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right).$$

- Für  $n = 6$  finden wir:

$$Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) - C_{13} \cdot |W(x_0)|^2 \cdot \alpha^4 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \mathcal{O}_{\varepsilon,N}(\alpha^4).$$

In allen drei Fällen dominieren für hinreichend kleine  $\alpha$  die negativen  $W(x_0)$ -Terme alle anderen Korrektur-Terme. Wir haben also  $Q_{p_c}^g(f_{\alpha,\varepsilon}) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ , für klein gewählte  $\varepsilon > 0$  und anschließend klein gewählte  $\alpha > 0$ . Somit haben wir Aussage (i) gezeigt. Wie oben bereits erläutert, folgt dann auch  $\lambda(M, [g]) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ , also Aussage (ii).  $\square$

**Übung 4.1.** Sei  $B$  eine reelle, symmetrische  $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{S^{n-1}} \langle Bx, x \rangle d\text{vol}^{S^{n-1}} = \gamma_n \cdot \text{tr}(B) \quad (4.9)$$

für eine positive Konstante  $\gamma_n$ , die nur von  $n$  abhängt, und berechnen Sie den Wert von  $\gamma_n$ .

Diese Formel haben wir im Beweis angewandt, wobei  $B$  die Hesse-Matrix der Skalar-krümmung war.

#### Bemerkungen 4.6.

- (1) Die Bedingung „ $(M, g)$  nicht konform flach“ kann man in Satz 4.4 nicht ersatzlos streichen, denn sonst wäre  $(M, g) = (S^n, g_{\text{sph}})$  ein Gegenbeispiel.
- (2) Für viele konform flache Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  gilt trotzdem  $\lambda(M, [g]) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ , zum Beispiel, wenn die Schnittkrümmung  $K_g$  konstant und  $\leq 0$  ist (etwa flache Tori).

## 4.2. Existenz von konformen Normalkoordinaten

Für einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  setze nun

$$\mathcal{P}_m(V) := \{\text{reelle Polynome auf } V, \text{ homogen vom Grad } m\}.$$

Die Räume  $\mathcal{P}_m(V)$  sind endlichdimensionale reelle Vektorräume, mehr dazu in Abschnitt 6.5.

**Lemma 4.7.** *Seien  $x^1, \dots, x^n$  lineare Koordinaten des Vektorraums  $V$ . Dann gilt für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  und alle  $f \in \mathcal{P}_m(V)$ :*

$$\left( \sum_{i=1}^n x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = m f.$$

*Beweis.*

Die Aussage ist offensichtlich für  $m = 0$  und  $m = 1$ . Für  $m \geq 2$  zeigt man sie rekursiv aus der Derivationseigenschaft des Vektorfelds  $\sum_{i=1}^n x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ .  $\square$

Sei  $\Delta_0 := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$  der Laplace-Operator auf  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$ . Dann ist

$$\Delta_0(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n).$$

Für  $r^2 = |x|^2 = \sum_{i=1}^n |x^i|^2$  ist folglich

$$r^2 \cdot \Delta_0 : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$$

ein Endomorphismus. Wir werden benötigen, dass dieser Endomorphismus keine positiven Eigenwerte besitzt, deswegen betrachten wir das (komplexe) Spektrum.

**Lemma 4.8.** *Jeder (komplexe) Eigenwert von  $r^2 \cdot \Delta_0$  auf  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  hat die Form  $\lambda_j = -2j(n-2+2m-2j)$  mit  $j = 0, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .*

*Beweis.*

Sei  $\mathcal{P}_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  die Komplexifizierung von  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ .

Wir zeigen die Aussage durch Induktion über  $m$ :

$m = 0, 1$ : Die Behauptung ist erfüllt, denn  $r^2 \cdot \Delta_0|_{\mathcal{P}_0^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n), \mathcal{P}_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)} \equiv 0$  und  $j = 0$ .

$m \geq 2$ : Sei  $r^2 \cdot \Delta_0 f = \lambda f$  für ein  $f \in \mathcal{P}_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\lambda \cdot \Delta_0 f = \Delta_0(\lambda \cdot f)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_0 (r^2 \cdot \Delta_0 f) \\
&= \Delta_0 (r^2) \cdot \Delta_0 f - 2 \langle \nabla r^2, \nabla \Delta_0 f \rangle + r^2 \Delta_0^2 f \\
&= -2n \Delta_0 f - 4 \sum_{i=1}^n x^i \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \Delta_0 f}_{\in \mathcal{P}_{m-2}^{\mathbb{C}}} + r^2 \Delta_0^2 f \\
&= -2n \Delta_0 f - 4(m-2) \Delta_0 f + r^2 \Delta_0^2 f \\
\Rightarrow \quad r^2 \Delta_0^2 f &= (\lambda + 2n + 4(m-2)) \Delta_0 f.
\end{aligned}$$

Ist  $\Delta_0 f = 0$ , so auch  $r^2 \cdot \Delta_0 f = 0$ , also  $\lambda = 0 = \lambda_0$ .

Ist  $\Delta_0 f \neq 0$ , so ist  $\lambda + 2n + 4(m-2)$  Eigenwert von  $r^2 \cdot \Delta_0$  auf  $\mathcal{P}_{m-2}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ . Nach der Induktionsvoraussetzung ist dann

$$\lambda + 2n + 4(m-2) = -2j(n-2+2(m-2)-2j)$$

für ein  $j \in \{0, \dots, \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor\}$ . Folglich ist

$$\begin{aligned}
\lambda &= -2j(n-2+2(m-2)-2j) - 2n - 4(m-2) \\
&= -2(j(n-2+2m-2(j+1)) - 2j + n + 2m - 4) \\
&= -2(j+1)(n-2+2m-2(j+1)),
\end{aligned}$$

und es gilt  $j+1 \in \{1, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$ . □

Insbesondere sind alle Eigenwerte nichtpositiv.

**Bemerkung 4.9.** Umgekehrt ist jedes solche  $\lambda_j$  auch ein Eigenwert von  $r^2 \cdot \Delta_0$  auf  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ . Zunächst kann man mit Lemma 6.12 leicht die Aussage  $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) > \dim \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$  zeigen.

Hieraus ergibt sich, dass  $\Delta : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$  nicht injektiv ist, also  $\lambda_0 = 0$  ein Eigenwert von  $r^2 \Delta : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  ist. Die Eigenwerte  $\lambda_j$ ,  $j > 0$  erhält man dann mit einer Rekursion, die analog zu der im obigem Beweis ist, unter Nutzung der Tatsache, dass Multiplikation mit  $r^2$  jeden Eigenvektor von  $r^2 \Delta : \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$  zum Eigenwert  $\mu$  auf einen Eigenwert von  $r^2 \Delta : \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  zum Eigenwert  $(-2n - 4(m-2) + \mu)$  abbildet.

Mit denselben Argumenten kann man dann auch die Multiplizitäten der Eigenwerte bestimmen und zeigen, dass dieser Endomorphismus diagonalisierbar ist.

Für eine genauere Diskussion und die Anwendung davon auf das Spektrum von  $\mathbb{S}^{n-1}$  verweisen wir auf [18, III.C.I].

**Proposition 4.10.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ , sei  $x_0 \in M$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\text{inj}(x_0) > \delta > 0$ . Sei  $T$  eine symmetrische  $(k+2)$ -Multilinearform auf  $T_{x_0}M$ .



Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $f \in \mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0}M)$ , so dass für die auf  $B_\delta(x_0)$  definierte Metrik  $\bar{g} = e^{2f \circ \exp_{x_0}^{-1}} \cdot g$  gilt:

$$\text{Sym}(\bar{\nabla}^k \text{ric}^{\bar{g}}) \Big|_{x_0} = T.$$

Elemente  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  nennen wir *Multiindex*, und wir führen in Koordinaten  $x = (x^1, \dots, x^n)$  die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \sum_{i=1}^n \alpha_i, \\ x^\alpha &:= \prod_{i=1}^n (x^i)^{\alpha_i}, \\ D_\alpha &:= \frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x^1)^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{(\partial x^n)^{\alpha_n}} \quad \text{auf } \mathcal{C}^k(M) \text{ mit } k \geq |\alpha|, \\ \nabla_\alpha &:= \nabla^{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^1}}_{\alpha_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}}_{\alpha_n\text{-mal}}} \quad \text{auf } \mathcal{C}^k\text{-Tensoren mit } k \geq |\alpha|, \\ T_{\alpha ij} &:= T\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^1}}_{\alpha_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}}_{\alpha_n\text{-mal}}, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &\quad \text{für symmetrische } T \in \Gamma((T^*M)^{|\alpha|+2}). \end{aligned}$$

Man beachte, dass der Ausdruck  $\nabla_\alpha$  nicht invariant unter Permutation der Indizes ist. Dies ist für unsere folgenden Zwecke aber wenig erheblich, da wir nur den symmetrischen Anteil betrachten werden. Der Ausdruck  $D_\alpha \text{ric}_{ij}$  sollte dann als  $D_\alpha(\text{ric}_{ij})$  verstanden werden, wohingegen bei

$$(\nabla^{|\alpha|} \text{ric})_{\alpha ij} = (\nabla_\alpha \text{ric})\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

der Multiindex  $\alpha$  für die  $|\alpha|$ -fache Ableitung genutzt wird, und  $i, j$  sind die Indizes für die ursprünglichen Komponenten der Ricci-Krümmung in  $\nabla^{|\alpha|} \text{ric}$ , die allerdings erst nach der kovarianten Ableitung ausgewertet werden.

*Beweis.*

(a) Seien  $(x^1, \dots, x^n)$  riemannsche Normalkoordinaten um  $x_0$  bzgl.  $g$ . Setze

$$F_g(x) := \sum_{i,j=1}^n \text{ric}_{ij}(x) x^i x^j.$$

Dann haben wir folgende Taylor-Entwicklungen um 0:

$$\begin{aligned}
 \text{ric}_{ij}(x) &= \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} (D_\alpha \text{ric}_{ij})|_0 x^\alpha + \mathcal{O}(r^{k+1}) \\
 F_g(x) &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} (D_\alpha \text{ric}_{ij})|_0 x^\alpha x^i x^j + \mathcal{O}(r^{k+3}) \\
 &= \underbrace{\sum_{m=2}^{k+2} \frac{1}{(m-2)!} \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=m-2} (D_\alpha \text{ric}_{ij})|_0 x^\alpha x^i x^j}_{=: F_g^{(m)} \in \mathcal{P}_m(T_{x_0} M)} + \mathcal{O}(r^{k+3}).
 \end{aligned}$$

- (b) Wir vergleichen nun die kovarianten Ableitungen mit den üblichen partiellen Ableitungen in den Koordinaten  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Für einen Tensor  $\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$  und Indizes  $i, j, k$  definieren wir  $(\Gamma\varphi)_{ijk}$  durch

$$\left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \varphi \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) + (\Gamma\varphi)_{ijk}.$$

Die Terme  $(\Gamma\varphi)_{ijk}|_x$  hängen von den Christoffelsymbolen ab und sind algebraische Ausdrücke in  $\varphi|_x$ ,  $g_{rs}|_x$  und den 1. Ableitungen von  $g_{rs}$  an der Stelle  $x$ . Entsprechend definieren wir den Differentialoperator  $P_{\alpha jk}$  durch

$$\left( \nabla_\alpha \varphi \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = D_\alpha \left( \varphi \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) + P_{\alpha jk} \varphi.$$

Induktiv prüft man leicht, dass  $P_{\alpha jk}$  ein Differentialoperator der Ordnung  $\leq |\alpha| - 1$  ist, dessen Koeffizienten in  $x$  algebraische Ausdrücke in  $g_{ij}$  und Ableitungen davon bis zur Ordnung  $|\alpha|$  an der Stelle  $x$  sind. Schließlich ist

$$(\nabla^{|\alpha|} \text{ric})|_0|_{\alpha ij} = D_\alpha \text{ric}_{ij}|_0 + \underbrace{(P_{\alpha ij} \text{ric})|_0}_{=: S_{\alpha ij}}.$$

Der Term  $S_{\alpha ij}$  ist ein algebraischer Ausdruck in  $g_{ij}$  und Ableitungen davon bis zur Ordnung  $|\alpha| + 1$  an der Stelle 0. Analoge Notationen und Rechnungen nutzen wir für  $\bar{g}$ . Als Koordinaten nutzen wir nun Normalkoordinaten bezüglich  $g$ , sowohl, um  $g$ ,  $\nabla_\alpha \text{ric}^g$  und  $S_{\alpha ij}$  in Koordinaten zu schreiben, also auch um  $\bar{g}$ ,  $\bar{\nabla}_\alpha \text{ric}^{\bar{g}}$  und  $\bar{S}_{\alpha ij}$  in Koordinaten zu behandeln.

Für  $f \in \mathcal{P}_{k+2}$  stimmen  $g_{ij}$  und  $\bar{g}_{ij}$  und ihre Ableitungen bis zur Ordnung  $k+1$  an der Stelle 0 überein. Es ist also

$$\bar{S}_{\alpha ij} = S_{\alpha ij}, \quad \text{für } |\alpha| \leq k. \quad (4.10)$$

- (c) Die Behauptung der Proposition ist äquivalent dazu, dass es ein eindeutiges  $f \in \mathcal{P}_{k+2}$  gibt mit

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \left( \text{Sym} \bar{\nabla}^k \text{ric}^{\bar{g}} \big|_0 \right)_{\alpha ij} x^\alpha x^i x^j = \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} T_{\alpha ij} x^\alpha x^i x^j, \quad (4.11)$$

und die linke Seite dieser Gleichung ist gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \left( (D_\alpha + \bar{P}_\alpha) \text{ric}_{ij}^{\bar{g}} \right) \big|_0 x^\alpha x^i x^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \left( D_\alpha \text{ric}_{ij}^{\bar{g}} \right) \big|_0 + \bar{S}_{\alpha ij} x^\alpha x^i x^j \\ &= k! F_g^{(k+2)}(x) + \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \bar{S}_{\alpha ij} x^\alpha x^i x^j. \end{aligned}$$

Wir suchen also ein eindeutiges  $f \in \mathcal{P}_{k+2}$  mit

$$\begin{aligned} F_g^{(k+2)}(x) &= \frac{1}{k!} \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} (T_{\alpha ij} - \bar{S}_{\alpha ij}) x^\alpha x^i x^j \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{k!} \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} (T_{\alpha ij} - S_{\alpha ij}) x^\alpha x^i x^j. \end{aligned}$$

Aus (2.3) erhalten wir

$$\text{ric}^{\bar{g}} = \text{ric}^g - (n-2) \cdot (\nabla^2 f - \nabla f \otimes \nabla f) + (\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2) \cdot g.$$

Mit der Schreibweise  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  haben wir

$$(\nabla^2 f)_{ij} = \partial_i \partial_j f - \sum_{k=1}^n \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\mathcal{O}(r)} \partial_k f = \partial_i \partial_j f + \mathcal{O}(r^{k+2})$$

und deswegen

$$\begin{aligned} F_{\bar{g}}(x) &= F_g(x) - (n-2) \sum_{i,j=1}^n \left( \partial_i \partial_j f(x) + \mathcal{O}(r^{k+2}) - \underbrace{\partial_i f(x) \partial_j f(x)}_{\mathcal{O}(r^{2k+2})} \right) x^i x^j \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \left( \Delta f(x) - (n-2) \underbrace{|\nabla f(x)|^2}_{\mathcal{O}(r^{2k+2})} \right) g_{ij}(x) x^i x^j \end{aligned}$$

$$= F_g(x) - (n-2) \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \partial_i \partial_j f(x) + \sum_{i,j=1}^n \Delta f(x) \underbrace{g_{ij}(x) x^i x^j}_{=r^2} + \mathcal{O}(r^{k+4}), \quad (4.12)$$

da  $k \geq 0$ . Wir berechnen weiter:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \partial_i \partial_j f(x) &= \sum_{i,j=1}^n x^i \partial_i (x^j \partial_j f)(x) - \sum_{i=1}^n (x^i \partial_i f)(x) \\ &= (k+2)^2 f(x) - (k+2)f(x) \\ &= (k+2)(k+1)f(x). \end{aligned}$$

Nun ist nach Gleichung (1.17)<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta_0 f + \mathcal{O}(r^{k+1}) \\ \Rightarrow r^2 \Delta f &= r^2 \Delta_0 f + \mathcal{O}(r^{k+3}). \end{aligned}$$

Für den homogenen Teil vom Grad  $(k+2)$  in (4.12) erhalten wir daher die Gleichung

$$F_{\bar{g}}^{(k+2)} = F_g^{(k+2)} + r^2 \Delta_0 f - (n-2)(k+2)(k+1)f.$$

Gleichung (4.11) ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} &r^2 \Delta_0 f - (n-2)(k+2)(k+1)f \\ &= -F_g^{(k+2)} + \frac{1}{k!} \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} (T_{\alpha ij} - S_{\alpha ij}) x^\alpha x^i x^j. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die Zahl  $(n-2)(k+2)(k+1) > 0$  ist nach Lemma 4.8 kein Eigenwert von  $r^2 \Delta_0$  auf  $\mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0} M)$ . Somit ist  $r^2 \Delta_0 - (n-2)(k+2)(k+1) \cdot \text{id}$  ein injektiver, also bijektiver Endomorphismus von  $\mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0} M)$ . Daher gibt es genau ein  $f \in \mathcal{P}_{k+2}(T_{x_0} M)$ , das (4.13) erfüllt. Dieses  $f$  ist also auch die eindeutige Lösung von Gleichung (4.11) und daraus ergibt sich die Proposition.  $\square$

**Übung 4.2.** Beweisen Sie den Satz von Graham: Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x_0 \in M$  und  $N \in \mathbb{N}_0$ . Dann gibt es eine Metrik  $\bar{g} \in [g]$  mit

$$\text{Sym}(\bar{\nabla}^k \text{ric}^{\bar{g}})(x_0) = 0 \quad \text{für alle } k = 0, \dots, N.$$

Im folgenden schreiben wir wieder  $\partial_i$  für  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  relativ zu riemannschen Normalkoordinaten und  $R_{ijk\ell} := g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_\ell)$ .

<sup>2</sup>Man könnte die folgende Formel auch zu  $\Delta f = \Delta_0 f + \mathcal{O}(r^{k+2})$  verbessern, dies wird aber nicht benötigt.

**Lemma 4.11.** *Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x_0 \in M$ . In riemannschen Normalkoordinaten um  $x_0$  haben wir folgende Taylor-Entwicklungen:*

$$\begin{aligned} g_{pq}(x) &= \\ &\delta_{pq} - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n R_{pijq}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k R_{pijq}(0) x^i x^j x^k \\ &- \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{k\ell}^2 R_{pijq}(0) - \frac{2}{45} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0) R_{qk\ell m}(0) \right\} x^i x^j x^k x^\ell \\ &+ \mathcal{O}(r^5) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \det(g_{pq}(x)) &= \\ &1 - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j x^k \\ &- \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{k\ell}^2 \text{ric}_{ij}(0) + \frac{1}{90} \sum_{p,m=1}^n R_{pijm}(0) R_{pk\ell m}(0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{18} \text{ric}_{ij}(0) \text{ric}_{k\ell}(0) \right\} x^i x^j x^k x^\ell + \mathcal{O}(r^5). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Hierbei schreiben wir:  $\partial_{k\ell}^2 \text{ric}_{ij} := \partial_k \partial_\ell \text{ric}_{ij}$ .

Wir benutzen hier die Konvention  $R_{ijkl} = g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_\ell)$ . Und es gilt dann

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^n \text{ric}_{ij}(0) \text{ric}_{k\ell}(0) x^i x^j x^k x^\ell = \text{ric}|_0(X, X)^2,$$

falls  $x = \exp_{x_0}(X)$ .

*Beweis.*

- (a) Seien  $V, Y \in T_{x_0}M$  mit  $|V| = 1$ . Sei  $J$  das Jacobi-Feld längs der Geodätischen  $r \mapsto \exp_{x_0}(rV) =: c(r)$  mit Anfangsbedingungen  $J(0) = 0$  und  $J'(0) := \frac{\nabla}{dr} J(0) = Y$  ist, d. h.  $J$  erfüllt die Jacobi-Gleichung

$$J'' = -R(J, c')c'. \quad (4.16)$$

Wir erhalten  $J$  durch Ableitung einer geodätischen Variation, nämlich als

$$J(r) := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{x_0}(r(V + sY)).$$

Man errechnet daraus, dass das Differential von  $\exp_{x_0}$  gegeben ist durch

$$d \exp_{x_0} \big|_{rV} (Y) = \frac{J(r)}{r}.$$

Für  $x = \exp_{x_0}(rV)$ ,  $rV = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i$  und  $\eta = d \exp_{x_0} \big|_{rV} (Y) = \sum_{i=1}^n \eta^i \partial_i$  ist dann

$$g_{pq}(x) \eta^p \eta^q = g(\eta, \eta) = \frac{1}{r^2} g(J(r), J(r)).$$

Die Taylor-Entwicklung der Metrik lässt sich daher durch die Taylor-Entwicklung der Jacobi-Felder als Funktion in  $r$  berechnen.

(b) Wir differenzieren dazu die Jacobi-Gleichung (4.16) nach  $r$  und erhalten:

$$\begin{aligned} J'' &= -R(J, c') c' \\ J''' &= -\nabla_{c'} R(J, c') c' - R(J', c') c' \\ J^{(4)} &= -\nabla_{c', c'}^2 R(J, c') c' - 2\nabla_{c'} R(J', c') c' - R(J'', c') c' \\ J^{(5)} &= -(\nabla_{c', c', c'}^3 R)(J, c') c' - 3(\nabla_{c', c'}^2 R)(J', c') c' - 3\nabla_{c'} R(J'', c') c' - R(J''', c') c'. \end{aligned}$$

An der Stelle  $r = 0$  erhalten wir aus den Anfangsbedingungen von  $J$ :

$$\begin{aligned} J(0) &= 0 \\ J'(0) &= Y \\ J''(0) &= 0 \\ J'''(0) &= -R(Y, V)V \\ J^{(4)}(0) &= -2(\nabla_V R)(Y, V)V \\ J^{(5)}(0) &= -3(\nabla_{V, V}^2 R)(Y, V)V + R(R(Y, V)V, V)V. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} |J(r)|^2 \\ &= \frac{1}{r^2} \left| rY - \frac{r^3}{3!} R(Y, V)V - \frac{r^4}{4!} \cdot 2 \cdot \nabla_V R(Y, V)V \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^5}{5!} \left( 3\nabla_{V, V}^2 R(Y, V)V - R(R(Y, V)V, V)V \right) + \mathcal{O}(r^6) \right|^2 \\ &= |Y|^2 - \frac{r^2}{3} \langle R(Y, V)V, Y \rangle - \frac{r^3}{6} \langle \nabla_V R(Y, V)V, Y \rangle \\ &\quad + r^4 \left\{ \frac{1}{36} |R(Y, V)V|^2 - \frac{1}{20} \langle \nabla_{V, V}^2 R(Y, V)V, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{60} \langle R(R(Y, V)V, V)V, Y \rangle \right\} + \mathcal{O}(r^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |Y|^2 - \frac{r^2}{3} \langle R(Y, V)V, Y \rangle - \frac{r^3}{6} \langle \nabla_V R(Y, V)V, Y \rangle \\
&\quad + r^4 \left\{ \frac{2}{45} |R(Y, V)V|^2 - \frac{1}{20} \langle \nabla_{V, V}^2 R(Y, V)V, Y \rangle \right\} + \mathcal{O}(r^5) \\
&= \delta_{pq} \eta^p \eta^q - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n R_{pijq}(0) \eta^p x^i x^j \eta^q - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k R_{pijq}(0) x^k \eta^p x^i x^j \eta^q \\
&\quad + \left\{ \frac{2}{45} \sum_{i,j,k,\ell,m=1}^n R_{pijm}(0) \eta^p x^i x^j R_{qk\ell m}(0) \eta^q x^k x^\ell \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{20} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \partial_{k\ell}^2 R_{pijq}(0) x^k x^\ell \eta^p x^i x^j \eta^q \right\}.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für die Taylor-Entwicklung der Metrik die Formel (4.14).

(c) Die Matrix  $(g_{pq})_{p,q=1,\dots,n}$  besitzt die Darstellung

$$(g_{pq})_{p,q=1,\dots,n} = \text{EXP}(A(x)) + \mathcal{O}(r^5), \quad (4.17)$$

wobei wir definieren

$$\begin{aligned}
A_{pq}(x) &:= -\frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n R_{pijq}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k R_{pijq}(0) x^i x^j x^k \\
&\quad - \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{k,\ell}^2 R_{pijq}(0) + \frac{1}{90} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0) R_{mk\ell q}(0) \right\} x^i x^j x^k x^\ell \quad (4.18)
\end{aligned}$$

und wobei  $\text{EXP}(A) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{k!} A^k$  die Matrix-Exponentialfunktion bezeichnet. Denn

$$\begin{aligned}
\text{EXP}(A)_{pq} &= \delta_{pq} + A_{pq} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n A_{pm} A_{mq} + \mathcal{O}(r^6) \\
&= \delta_{pq} - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n R_{pijq}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k R_{pijq}(0) x^i x^j x^k \\
&\quad - \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{k,\ell}^2 R_{pijq}(0) + \frac{1}{90} \sum_{m=1}^n R_{pijm}(0) R_{mk\ell q}(0) \right\} x^i x^j x^k x^\ell \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \sum_{i,j,k,\ell,m=1}^n R_{pijm}(0) R_{mk\ell q}(0) x^i x^j x^k x^\ell + \mathcal{O}(r^5) \\
&= g_{pq} + \mathcal{O}(r^5).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\text{tr}(A(x)) := -\frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j x^k$$

$$- \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{k,\ell}^2 \operatorname{ric}_{ij}(0) + \frac{1}{90} \sum_{m,p=1}^n R_{pijm}(0) R_{mk\ell p}(0) \right\} x^i x^j x^k x^\ell. \quad (4.19)$$

Mit Lemma 4.12 erhalten wir nun die Taylor-Entwicklung des quadrierten Volumenelements:

$$\begin{aligned} \det(g_{pq}(x)) &= \det(\operatorname{EXP}(A(x)) + \mathcal{O}(r^5)) \\ &= \det(\operatorname{EXP}(A(x))) + \mathcal{O}(r^5) \\ &\stackrel{(4.20)}{=} e^{\operatorname{tr}(A(x))} + \mathcal{O}(r^5) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^n \operatorname{ric}_{ij}(0) x^i x^j - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k \operatorname{ric}_{ij}(0) x^i x^j x^k \\ &\quad - \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{20} \partial_{k,\ell}^2 \operatorname{ric}_{ij}(0) + \frac{1}{90} \sum_{m,p=1}^n R_{pijm}(0) R_{mk\ell p}(0) \right\} x^i x^j x^k x^\ell \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \operatorname{ric}_{ij}(0) \operatorname{ric}_{k\ell}(0) x^i x^j x^k x^\ell + \mathcal{O}(r^5). \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 4.12.** Für jede Matrix  $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$  gilt:

$$\det(\operatorname{EXP}(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)}. \quad (4.20)$$

*Beweis.*

(a) Sei  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  eine Diagonalmatrix. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(\operatorname{EXP}(A)) &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \\ &= e^{\operatorname{tr}(A)}. \end{aligned}$$



- (b) Sei nun  $A$  diagonalisierbar, d. h. es gibt ein  $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , so dass  $S \cdot A \cdot S^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist. Wegen  $S \cdot A^k \cdot S^{-1} = (S \cdot A \cdot S^{-1})^k$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{EXP}(A)) &= \det(S \cdot \mathrm{EXP}(A) \cdot S^{-1}) \\ &= \det(\mathrm{EXP}(S \cdot A \cdot S^{-1})) \\ &\stackrel{(a)}{=} e^{\mathrm{tr}(S \cdot A \cdot S^{-1})} \\ &= e^{\mathrm{tr}(A)}. \end{aligned}$$

- (c) Da  $\{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ diagonalisierbar}\}$  in  $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$  dicht liegt und beide Seiten der Gleichung (4.20) stetig in  $A$  sind, gilt die Gleichung für alle  $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ .  $\square$

**Übung 4.3.** Zeigen Sie:  $\{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ diagonalisierbar}\}$  liegt in  $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$  dicht.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass

$$\{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ hat paarweise verschiedene Eigenwerte}\}$$

in  $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$  dicht liegt. Hier ist die Jordan'sche Normalform hilfreich.

*Beweis von Satz 4.1.*

- (a) Durch vollständige Induktion nach  $N$  zeigen wir, dass für jedes  $N \in \mathbb{N}$  die Metrik  $g$  konform so geändert werden kann, dass in riemannschen Normalkoordinaten gilt:

$$\det(g_{pq}(x)) = 1 + \mathcal{O}(r^{N+1}). \quad (4.21)$$

Für  $N = 1$  gilt dies in riemannschen Normalkoordinaten bereits ohne konforme Änderung.

Es gelte also nun die Gleichung (4.21) für ein festes  $N \in \mathbb{N}$ . Für die Jacobi-Felder  $J$  im Beweis von Lemma 4.11 finden wir durch sukzessive Differentiation unter Verwendung von  $J(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} J^{(k)}(0) &= -(k-2) \nabla_{X, \dots, X}^{k-3} R(Y, X) X \\ &\quad + \text{Terme niedrigerer Ableitungsordnung in } R \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} |J(r)|^2 &= \dots - 2(k-2) \left\langle \nabla_{X, \dots, X}^{k-3} R(Y, X) X, Y \right\rangle \cdot \frac{r^{k-1}}{k!} \\ &\quad + \text{Terme niedrigerer Ableitungsordnung in } R \end{aligned}$$

Mit  $N = k - 2$  folgt

$$\det(g_{pq}(x)) = 1 + c_N \sum_{i,j=1}^n \sum_{|\alpha|=N-1} \left( \nabla^\alpha \mathrm{ric}_{ij}(0) + B_{\alpha ij} \right) x^\alpha x^i x^j + \mathcal{O}(r^{N+2}).$$

Hierbei ist  $B_{\alpha ij}$  ein algebraischer Ausdruck in  $R$  und Ableitungen bis zur Ordnung  $N - 2$  von  $R$ . Sei nun  $T$  die Symmetrisierung des durch  $-B_{\alpha ij}$  gegebenen Tensors.

Nach Proposition 4.10 gibt es genau ein Polynom  $f \in \mathcal{P}_{N+1}(T_{x_0}M)$ , so dass für  $\bar{g} = e^{2f} \cdot g$  der Ausdruck  $\text{Sym}(\bar{\nabla}^{N-1} \text{ric}_{\bar{g}} - T)$  verschwindet. Hierbei bleiben die  $B_{\alpha ij}$ , da sie nur von Ableitungen niedriger Ordnung abhängen. Wir erhalten hieraus

$$\det(\bar{g}_{pq}(x)) = 1 + \mathcal{O}(r^{N+2}).$$

Der Induktionsschritt ist somit gezeigt, und die Aussage folgt also für alle  $N \in \mathbb{N}$ .

- (b) Sei nun  $\det(g_{pq}(x)) = 1 + \mathcal{O}(r^5)$ . Aus den Termen zweiter Ordnung der Taylor-Entwicklung (4.15) erhalten wir  $\text{ric}_{ij}(0)x^i x^j = 0$ , also  $\text{ric}|_{x_0} = 0$ . Es folgt:

$$R|_{x_0} = W|_{x_0} \quad (4.22)$$

$$\text{und} \quad \text{scal}(x_0) = 0. \quad (4.23)$$

- (c) Aus den Termen dritter Ordnung der Taylor-Entwicklung (4.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k \text{ric}_{ij}(0) x^i x^j x^k = \sum_{i,j,k=1}^n (\nabla_k \text{ric})(\partial_i, \partial_j)|_0 x^i x^j x^k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \text{Sym}(\nabla \text{ric})(\partial_k, \partial_i, \partial_j)|_0 x^i x^j x^k \end{aligned} \quad (4.24)$$

wobei wir

$$\begin{aligned} (\nabla_k \text{ric})(\partial_i, \partial_j)|_0 &= (\partial_k \text{ric}_{ij})(0) - \text{ric}(\nabla_k \partial_i, \partial_j)|_0 - \text{ric}(\partial_i, \nabla_k \partial_j)|_0 \\ &= (\partial_k \text{ric}_{ij})(0) \end{aligned}$$

genutzt haben. Wir haben somit  $\text{Sym}(\nabla \text{ric})|_0 = 0$ , und wir rechnen dann für  $\ell = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} 0 &= 3 \sum_{i=1}^n \text{Sym}(\nabla \text{ric})(\partial_\ell, \partial_i, \partial_i)|_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \nabla_\ell \text{ric}(\partial_i, \partial_i)|_0 + \nabla_i \text{ric}(\partial_\ell, \partial_i)|_0 + \nabla_i \text{ric}(\partial_i, \partial_\ell)|_0 \right) \\ &= \nabla_\ell \text{scal}|_0 + 2(\text{div } \text{ric})|_0(\partial_\ell) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} 2\nabla_\ell \text{scal}|_0. \end{aligned}$$

Mit dem bereits bewiesenen  $\text{scal}(0) = 0$  folgt dann  $\text{scal} = \mathcal{O}(r^2)$ .

(d) Aus den Termen vierter Ordnung der Taylor-Entwicklung (4.15) erhalten wir nun:

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^n \left( \partial_{k,\ell}^2 \text{ric}_{ij}(0) + \frac{2}{9} R_{pijm}(0) R_{m\ell kp}(0) \right) x^i x^j x^k x^\ell = 0. \quad (4.25)$$

Für  $\mu \neq \nu$  setzen wir in (4.25)  $x^\mu = t$ ,  $x^\nu = s$ ,  $x^i = 0$  für alle  $i \neq \mu, \nu$ . Ein Koeffizientenvergleich für das Monom  $s^2 t^2$  liefert an der Stelle  $0 \cong x_0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\mu,\mu}^2 \text{ric}_{\nu\nu} + \partial_{\nu,\nu}^2 \text{ric}_{\mu\mu} + 4 \partial_{\mu,\nu}^2 \text{ric}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{2}{9} \sum_{p,m=1}^n (2R_{p\nu\nu m} R_{p\mu\mu m} + W_{p\mu\nu m} W_{p\mu\nu m} + 2W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} + W_{p\nu\mu m} W_{p\nu\mu m}). \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für  $\mu = \nu$ , was man wiederum aus  $x^\mu := 1$  und  $x^i := 0$  für  $i \neq \mu$  leicht folgert. Summation über  $\nu$  und  $\mu$  liefert daher an der Stelle  $0 \cong x_0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta \text{scal} - \Delta \text{scal} + 4 \underbrace{\text{div}(\text{ric})}_{\frac{1}{2} \nabla \text{scal}} \\ &+ \frac{2}{9} \left( 2|\text{ric}|^2 + |W|^2 + 2 \sum_{\mu,\nu,m,p=1}^n W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} + |W|^2 \right) \\ &\stackrel{(4.26)}{=} -4\Delta \text{scal} + \frac{2}{9} \cdot 3|W|^2. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die 1. Bianchi-Identität benutzt, um die W-Terme zu identifizieren:

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{\mu,\nu,m,p=1}^n W_{p\mu\nu m} W_{p\nu\mu m} \\ &= \sum_{\mu,\nu,m,p=1}^n (W_{\mu\nu p m} + W_{\nu p \mu m}) \cdot (W_{\nu \mu p m} + W_{\mu p \nu m}) \\ &= -|W|^2 + 3A. \\ \implies 2A &= |W|^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

(e) Sei nun  $N \geq 4$  und  $g$  bereits konform so geändert, dass  $\det(g_{pq}) = 1 + \mathcal{O}(r^{N+1})$ . Setze  $\bar{g} := h \cdot g$ , wobei  $h$  in einer Umgebung von  $x_0$  so gewählt wird, dass in  $g$ -Normalkoordinaten gilt:  $\det(\bar{g}_{pq}) \equiv 1$ , d. h.  $h := \det(g_{pq})^{-1/n} = 1 + \mathcal{O}(r^{N+1})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{scal}^{\bar{g}}(x_0) &= 0 \\ \nabla \text{scal}^{\bar{g}}(x_0) &= 0 \\ \Delta^{\bar{g}} \text{scal}^{\bar{g}}(x_0) &= \frac{1}{6} |W(x_0)|^2. \end{aligned}$$

Hier gehen nur Ableitungen von  $\bar{g}$  bis zur Ordnung  $4 \leq N$  an der Stelle  $x_0$  ein, die mit denen von  $g$  übereinstimmen.  $\square$



## 5. Der Satz von der positiven Masse und die verbleibenden Fälle

Das Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, dass die Aubin–Schoen-Ungleichung in den verbleibenden Fällen, nämlich im Fall  $n \in \{3, 4, 5\}$  und im Fall  $W \neq 0$  aus dem Satz von der positiven Masse folgt. Dieser Satz wird oft auch das „Positive-Masse-Theorem“ genannt. Wir gehen hier ähnlich wie im Übersichtsartikel von Lee und Parker [44] vor, der wiederum von Schoens Originalarbeit [50] inspiriert ist. Den Beweis des benötigten Satzes von der positiven Masse werden wir allerdings nur im Fall ausführen, dass eine endliche Überlagerung von  $M$  spin ist, siehe Sätze 5.35 und 5.39. Dies ist eine kompaktifizierte Variante von Wittens Beweis, in dem Witten spinoriellen Methoden nutzte, um den Satz der positiven Masse zu zeigen [63, 47]. Die kompakte Version wurde in [5] veröffentlicht und kommt ganz ohne die sonst übliche „asymptotisch euklidische Analysis in gewichteten Räumen“ aus.

Da das Yamabe-Problem im Fall  $\lambda(M, [g]) \leq 0$  gelöst ist, nehmen wir in diesem Kapitel immer  $\lambda(M, [g]) > 0$  an.

### 5.1. Green-Funktionen von $Y$ und die Umstülpung

#### 5.1.1. Green-Funktionen von $Y$

Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  mit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Nach Lemma 3.17 gibt es dann eine Metrik  $\bar{g} \in [g]$  mit positiver Skalar­krümmung.

Wir wenden Lemma 1.80 und Bemerkung 1.88 (a) aus Abschnitt 1.11 für  $c = 0$  und für  $\bar{g}$  statt  $g$  an. Dann existiert also eine eindeutige Green-Funktion  $\bar{\Gamma}_{x_0}$  von  $Y^{\bar{g}}$  an der Stelle  $x_0$ . Die Green-Funktion  $\bar{\Gamma}_{x_0}$  ist zunächst als Distribution zu betrachten. Nach Fixierung der Metrik  $\bar{g}$  (oder genauer: der zugehörigen Volumenform  $\text{dvol}^{\bar{g}}$ ) definiert jede Funktion  $F$  in  $L^1_{\text{loc}}$  eine Distribution  $\varphi \mapsto \int_M F \varphi \text{dvol}^{\bar{g}} =: (F, \varphi)_{\bar{g}}$ . Der Index  $\bar{g}$  deutet hierbei an, dass diese Identifikation von  $\bar{g}$  abhängt.

**Lemma 5.1.** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ , und sei  $\bar{g} = f^{p_c-2} \cdot g$  für eine positive Funktion  $f \in C^\infty(M)$ . Wir nehmen an, dass eine Green-Funktion  $\bar{\Gamma}_{x_0}$  von  $Y^{\bar{g}}$  an der Stelle  $x_0$  existiert. Dann existiert auch eine Green-Funktion  $\Gamma_{x_0}$  von  $Y^g$  an der Stelle  $x_0$  und es gilt im Sinne von Funktionen in  $L^1_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$  oder in  $C^\infty(M \setminus \{x_0\})$*

$$\Gamma_{x_0}(y) = f(x_0) \cdot f(y) \cdot \bar{\Gamma}_{x_0}(y). \quad (5.1)$$

*Beweis.*

Wir haben  $\mathrm{dvol}^{\bar{g}} = f^{\frac{n}{2}(p_c-2)} \mathrm{dvol}^g = f^{p_c} \mathrm{dvol}^g$ , da  $\frac{n}{2}(p_c - 2) = p_c$  für  $p_c = 2n/(n - 2)$ . Nach Korollar 2.7 ist  $Y^{\bar{g}} = f^{1-p_c} \circ Y \circ f$ .

Es gilt dann für jedes  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned} (\delta_{x_0}, \varphi) &= (\bar{\Gamma}_{x_0}, Y^{\bar{g}} \varphi)_{\bar{g}} \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot Y^{\bar{g}}(\varphi) \, \mathrm{dvol}^{\bar{g}} \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot f^{1-p_c} \cdot Y^g(f\varphi) f^{\frac{n}{2}(p_c-2)} \, \mathrm{dvol}^g \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot f^{1-p_c} \cdot Y^g(f\varphi) f^{p_c} \, \mathrm{dvol}^g \\ &= \int_M \bar{\Gamma}_{x_0} \cdot Y^g(f\varphi) f \, \mathrm{dvol}^g. \end{aligned}$$

Wir setzen nun  $\varphi := f^{-1}\psi$  für eine Test-Funktion  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$  und erhalten

$$\begin{aligned} (\delta_{x_0}, \psi) &= f(x_0) \frac{1}{f(x_0)} \psi(x_0) \\ &= f(x_0) (\delta_{x_0}, f^{-1}\psi) \\ &= \int_M (f(x_0) f \bar{\Gamma}_{x_0}) \cdot Y^g(\psi) \, \mathrm{dvol}^g. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die durch

$$\varrho \mapsto \int_M \underbrace{(f(x_0) f \bar{\Gamma}_{x_0})}_{y \mapsto f(x_0) f(y) \bar{\Gamma}_{x_0}(y)} \cdot \varrho \, \mathrm{dvol}^g \quad (5.2)$$

definierte Abbildung eine Distribution definiert, die bezüglich der durch  $\mathrm{dvol}^g$  induzierten Paarung eine schwache Lösung von  $Y^g(\Gamma_{x_0}) = \delta_{x_0}$  ist. Diese Distribution ist somit eine Green-Funktion von  $Y^g$  an der Stelle  $x_0$  und wird deswegen auf  $M \setminus \{x_0\}$  durch eine glatte Funktion  $\Gamma_{x_0}$  dargestellt, und ein weiterer Blick auf (5.2) ergibt (5.1).  $\square$

Im folgenden sei  $r := d(x_0, \bullet)$  also die Distanz von  $x_0$ .

**Definition 5.2.** Für  $\tau \in \mathbb{R}$  definieren wir:

$$\mathcal{O}^{(k)}(r^\tau) \ni f \quad :\Leftrightarrow \quad \nabla^i f \in \mathcal{O}(r^{\tau-i}) \quad \text{für } i = 0, \dots, k. \quad (5.3)$$

Statt  $\mathcal{O}^{(1)}(r^\tau)$  schreiben wir  $\mathcal{O}'(r^\tau)$  und statt  $\mathcal{O}^{(2)}(r^\tau)$  schreiben wir  $\mathcal{O}''(r^\tau)$ .

**Proposition 5.3.** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  mit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Zu  $x_0 \in M$  setze  $G := 4(n-1) \cdot \omega_{n-1} \cdot \Gamma_{x_0}$ . Sei ferner  $n \in \{3, 4, 5\}$  oder  $(M, g)$  konform flach nahe  $x_0$ . Dann gibt es ein  $A \in \mathbb{R}$ , so dass nach geeigneter konformer Änderung der Metrik in Normalkoordinaten um  $x_0$  gilt:*

$$G = r^{2-n} + A + \mathcal{O}''(r) \quad \text{für } r \nearrow 0. \quad (5.4)$$

*Beweisskizze.*

- (a) Im Fall  $n \in \{3, 4, 5\}$  wenden wir eine leicht veränderte Version von Satz 4.1 für ausreichend großes  $N$  an. Die so erhaltene Metrik nennen wir wieder  $g$  statt  $\bar{g}$ , und wir nutzen nun  $g$ -Normalkoordinaten um  $x_0$ , statt der Koordinaten aus Satz 4.1. Wir erhalten dann in Normalkoordinaten um  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= 1 + \mathcal{O}(r^N) \text{ mit } N \geq n-1 \\ \text{scal}^g &= \mathcal{O}(r^2). \end{aligned}$$

Wir schreiben  $v := \sqrt{\det(g_{ij})} = 1 + \mathcal{O}(r^N)$  für die zugehörigen Volumendistortion. Man kann hierbei durch potenzielle Einschränkung auf eine kleinere Umgebung und konforme Änderung leicht  $\mathcal{O}(r^N)$  bzw.  $\mathcal{O}(r^2)$  zu  $\mathcal{O}^{(k)}(r^N)$  bzw.  $\mathcal{O}^{(k)}(r^2)$  verbessern. In Normalkoordinaten berechnet sich  $\Delta^g$  als

$$\Delta^g u = -\frac{1}{v} \sum_{i,j=1}^n \partial_i (v g^{ij} \partial_j u) \quad (5.5)$$

$$= -\frac{1}{v} \sum_{i,j=1}^n (\partial_i v) g^{ij} \partial_j u - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (g^{ij} \partial_j u), \quad (5.6)$$

siehe [22, Kap. I, Abschn. 1, (33)]. Mit  $\Delta_0$  bezeichnen wir nun den euklidischen Laplace-Operator auf dieser Koordinatenumgebung. Für eine um  $x_0$  radialsymmetrische Funktion  $u$  gilt auf Grund des Gauß-Lemmas  $-\sum_{i,j=1}^n \partial_i (g^{ij} \partial_j u) = \Delta_0 u$ . Ist also  $u \in \mathcal{O}^{(k)}(r^\tau)$  radialsymmetrisch, so haben wir:

$$(\Delta^g - \Delta_0)u = \mathcal{O}^{(k-1)}(r^{N+\tau-2}). \quad (5.7)$$

Damit berechnen wir mit  $a = 4\frac{n-1}{n-2}$ :

$$\begin{aligned} Y(G - r^{2-n}) &= 4(n-1) \cdot \omega_{n-1} \cdot \delta_{x_0} - a \cdot \Delta_0(r^{2-n}) \\ &\quad - \underbrace{a \cdot (\Delta^g - \Delta_0)(r^{2-n})}_{\in \mathcal{O}^{(k-1)}(r^{N-n})} - \underbrace{\text{scal}^g \cdot r^{2-n}}_{\in \mathcal{O}^{(k)}(r^{4-n})} \\ &\in \mathcal{O}^{(k-1)}(r^{-1}) \end{aligned}$$

für beliebig große  $k$ . Wähle  $R > 0$  so, dass der Ball  $\bar{B}_R(x_0)$  im Normalkoordinatengebiet enthalten ist. Für jedes  $q < n$  ist  $r^{-1} \in L^q(B_R(x_0))$ , denn

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} r^{-q} \, \mathrm{dvol}^g &< \infty \\ \Leftrightarrow \int_0^R r^{-q+n-1} \, \mathrm{d}r &< \infty \\ \Leftrightarrow -q+n-1 &> -1 \\ \Leftrightarrow q &< n. \end{aligned}$$

Für jedes solche  $q < n$  ist daher nach dem Satz über lokale elliptische Regularität 1.72

$$G - r^{2-n} \in H^{2,q}(B_{R/2}(x_0)).$$

Der lokale Sobolev'sche Einbettungssatz 1.53 liefert weiter

$$G - r^{2-n} \in C^{0,\kappa}(B_{R/4}(x_0))$$

für jedes  $\kappa \in (0, 1)$ , denn für  $q < n$  ausreichend nahe an  $n$  gilt  $\kappa \leq 2 - \frac{n}{q}$ . Insbesondere ist  $G - r^{2-n}$  stetig in 0; setze also  $A := (G - r^{2-n})(0)$ . Aus  $G - r^{2-n} \in C^{0,\kappa}(B_{R/4}(x_0))$  folgt dann zumindest  $G = r^{2-n} + A + \mathcal{O}(r^\kappa)$  für alle  $\kappa \in (0, 1)$ . Eine genauere Analyse des  $\mathcal{O}(r^\kappa)$ -Terms, siehe [44, Lemma 6.4 (a)] liefert die volle Aussage des Lemmas.

- (b) Sei nun  $(M, g)$  konform flach nahe  $x_0$ . Wir wählen eine konforme Änderung der Metrik, so dass in Normalkoordinaten um  $x_0$  gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} \\ \mathrm{scal}^g &\equiv 0 \\ \Delta^g &= \Delta_0. \end{aligned}$$

Die Rechnung in (a) zeigt, dass in diesen Koordinaten  $Y(G - r^{2-n}) = 0$ . Nach dem Satz über lokale elliptische Regularität 1.72 gilt dann  $G - r^{2-n} \in C^\infty(B_R(x_0))$  und insbesondere  $G = r^{2-n} + A + \mathcal{O}''(r)$ .  $\square$

#### Bemerkungen 5.4.

- (a) Eine etwas stärkere Version der Proposition findet sich in [44, Lemma 6.4 eq. (6.2)].  
 (b) Ohne die Bedingung  $n \in \{3, 4, 5\}$  oder  $(M, g)$  konform flach haben wir stets eine Entwicklung der Form

$$G = r^{2-n} \cdot \left( 1 + \sum_{k=4}^{n-2} \psi_k \right) + c \cdot \log(r) + \mathcal{O}''(r^0)$$

mit  $\psi_k \in \mathcal{P}_k(T_{x_0}M)$ , siehe [44, Lemma 6.4 eq. (6.2)]. Der logarithmische Term verschwindet, falls  $n$  ungerade ist.



- (c) Wieso verschwinden unter diesen Voraussetzungen alle Terme negativer Ordnung mit Ausnahme des Hauptterms? Da die hierbei auftretenden Potenzen und Dimensionen etwas willkürlich erscheinen, wollen wir einige tiefere Gründe für diese Asymptotik angeben. In der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten sieht man, dass man jeden elliptischen Differentialoperator, also auch  $Y$ , bis auf Glättungsoperatoren invertieren kann, d. h. es gibt einen Pseudodifferentialoperator  $P$  der Ordnung  $-2$  so, dass  $S := \text{id} - Y \circ P$  und  $T := \text{id} - P \circ Y$  Glättungsoperatoren sind. Glättungsoperatoren sind dadurch charakterisiert, dass ihr Integralkern eine glatte Funktion  $\mathcal{C}^\infty(M \times M)$  ist. Ist der Differentialoperator invertierbar, was  $Y$  nach Annahme erfüllt, kann man anschließend einen Glättungsoperator  $Q$  bestimmen, so dass  $P + Q$  das Inverse ist. Sei nun  $k_P$  bzw.  $k_{P+Q}$  der Integralkern zu  $P$  bzw.  $P + Q$ . Dies ist eine Distribution auf  $M \times M$ , die abseits der Diagonale glatt ist. Man sieht nun  $\Gamma_{x_0} = k_{P+Q}(\cdot, x_0)$ , also  $G = 4(n-1)\omega_{n-1}k_{P+Q}(\cdot, x_0)$ . Pseudodifferentialoperatoren besitzen eine asymptotische Entwicklung, die durch Fouriertransformation aus dem Symbol-Kalkül herrührt. Dies bewirkt, dass  $k_P(\cdot, x_0)$  Terme besitzt, die in  $r$  entweder homogen von Ordnung  $k \in \mathbb{Z}$  sind,  $k \geq 2-n$ , oder die Produkt von solchen Termen mit Potenzen von  $\log(r)$  sind. Die Terme in der Entwicklung von  $P$  mit  $k < 0$  sind hierbei lokale Ausdrücke. Der Operator  $Q$  trägt nur Ausdrücke mit Homogenität  $\geq 0$  bei, sind also in den negativen Termen nicht sichtbar. Leicht berechnet man auch den führenden Term als  $r^{2-n}$ . Wenn wir die logarithmischen Terme der Einfachheit halber ignorieren, erhalten wir also eine Entwicklung der Form

$$G = r^{2-n} \cdot \left(1 + \sum_{\ell=1}^{n-3} \psi_\ell\right) + \text{log-Terme} + \mathcal{O}''(r^0),$$

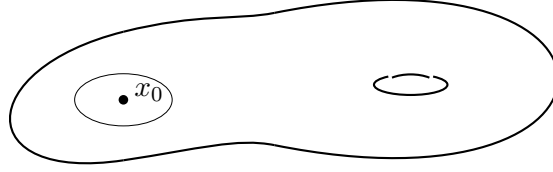
wobei  $\psi_\ell$  homogen von Ordnung  $\ell$  ist. Wir fragen also präziser: wieso verschwinden die Terme  $\psi_\ell$  unter unseren Voraussetzungen? Für  $n = 3$  ist dies offensichtlich, sei also  $n \geq 4$ . Nun ist zu bemerken, dass die Entwicklung sehr von der verwendeten Karte abhängt. In einer beliebigen Karte wird  $\psi_1$  nicht verschwinden, wohl aber in Normalkoordinaten. In Dimension  $n \geq 5$  muss auch  $\psi_2$  betrachtet werden. Der Term  $\psi_2$  hängt in Normalkoordinaten linear von  $\text{Ric}|_{x_0}$  ab, verschwindet also auf Grund der Wahl von konformen Normalkoordinaten. In Dimension  $n \geq 6$  muss man im allgemeinen mit  $\psi_3 \neq 0$  rechnen. Allerdings ist dann der Fall  $W \equiv 0$  speziell, da  $g$  dann auf einer Umgebung von  $x_0$  flach gewählt werden kann, wodurch alle  $\psi_\ell$  verschwinden. Ähnliches gilt auch jeweils für die logarithmischen Terme.

**Folgerung 5.5.** Sei  $(M, g)$  und  $x_0 \in M$  wie in Proposition 5.3, und zusätzlich sei  $M$  zusammenhängend. Dann ist  $\Gamma_{x_0} > 0$  auf  $M \setminus \{x_0\}$ , also auch  $G > 0$ .

*Beweis.*

- (a) Die Formel (5.1) zeigt, dass das Vorzeichen der Greenfunktion bei konformen Änderungen der Metrik erhalten bleibt. Nach Proposition 5.3 ist nach einer geeigneten

konformen Änderung  $G = 4(n-1)\omega_{n-1}\Gamma_{x_0} = r^{2-n} + \mathcal{O}(1) > 0$  nahe  $x_0$ . Somit ist  $\Gamma_{x_0} > 0$  auf einem Ball  $B_\varepsilon(x_0)$ .



- (b) Nach einer geeigneten konformen Änderung können wir annehmen, dass  $\text{scal}^g > 0$ . In  $M \setminus \{x_0\}$  gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} Y(\Gamma_{x_0}) &= (a\Delta^g + \underbrace{\text{scal}^g}_{>0})(\Gamma_{x_0}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

im klassischen Sinn. Aus dem Maximum-Prinzip 1.54 folgt dann

$$\min_{x \in M \setminus B_{\varepsilon/2}(x_0)} \Gamma_{x_0}(x) = \min_{x \in \partial B_{\varepsilon/2}(x_0)} \Gamma_{x_0}(x) > 0.$$

□

### 5.1.2. Die Umstülpung des euklidischen Raumes

In diesem Unterabschnitt führen wir nun die „Umstülpabbildung“ des euklidischen Raumes ein, die oft auch als „Inversion an der Einheitssphäre  $S^{n-1}$ “ bezeichnet wird. Wir definieren dazu auf  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  die *Umstülpabbildung*

$$\begin{aligned} \text{USA} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y &\mapsto \frac{y}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

wobei  $\varrho := |y|$ . Offensichtlich ist USA ein Diffeomorphismus mit  $\text{USA} = \text{USA}^{-1}$ .

Wie sieht die euklidische Metrik  $g_{\text{eukl}}$  in den umgestülpten Koordinaten aus? Wir berechnen dazu das Differential von USA:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{USA}^\alpha}{\partial y^i} &= \frac{\delta_i^\alpha}{\varrho^2} - \frac{y^\alpha \cdot 2y^i}{\varrho^4} \\ &= \varrho^{-2} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2}y^i y^\alpha), \end{aligned}$$

wobei  $i, \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Damit erhalten wir für die Koeffizienten der Metrik:

$$(\text{USA}^* g_{\text{eukl}})_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n (g_{\text{eukl}})_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial \text{USA}^\alpha}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial \text{USA}^\beta}{\partial y^j}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \delta_{\alpha\beta} \cdot \varrho^{-4} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \cdot (\delta_j^\beta - 2\varrho^{-2} y^j y^\beta) \\
&= \varrho^{-4} \cdot (\delta_{ij} - 4\varrho^{-2} y^i y^j + 4\varrho^{-4} y^i y^j \varrho^2) \\
&= \varrho^{-4} \cdot \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Somit ist  $\text{USA}^* g_{\text{eukl}} = \varrho^{-4} \cdot g_{\text{eukl}}$ . Insbesondere ist  $\text{USA} \in \text{Conf}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

Nach Beispiel 1.89 ist für  $n \geq 3$  die Funktion  $y \mapsto \frac{1}{(n-2) \cdot \omega_{n-1}} \cdot |y|^{2-n}$  eine Green-Funktion des euklidischen Laplace-Operators  $\Delta_0 = \Delta^{g_{\text{eukl}}}$ , das heißt  $\frac{1}{4(n-1) \cdot \omega_{n-1}} \cdot \varrho^{2-n}$ ,  $\varrho = |y|$  ist eine Green-Funktion des euklidischen Yamabe-Operators. Somit erhalten wir in obiger Notation  $G := \varrho^{2-n}$ . Insbesondere ist  $G^{p_c-2} = \varrho^{(2-n)(p_c-2)} = \varrho^{-4}$ , also  $\text{USA}^* g_{\text{eukl}} = G^{p_c-2} \cdot g_{\text{eukl}}$ .

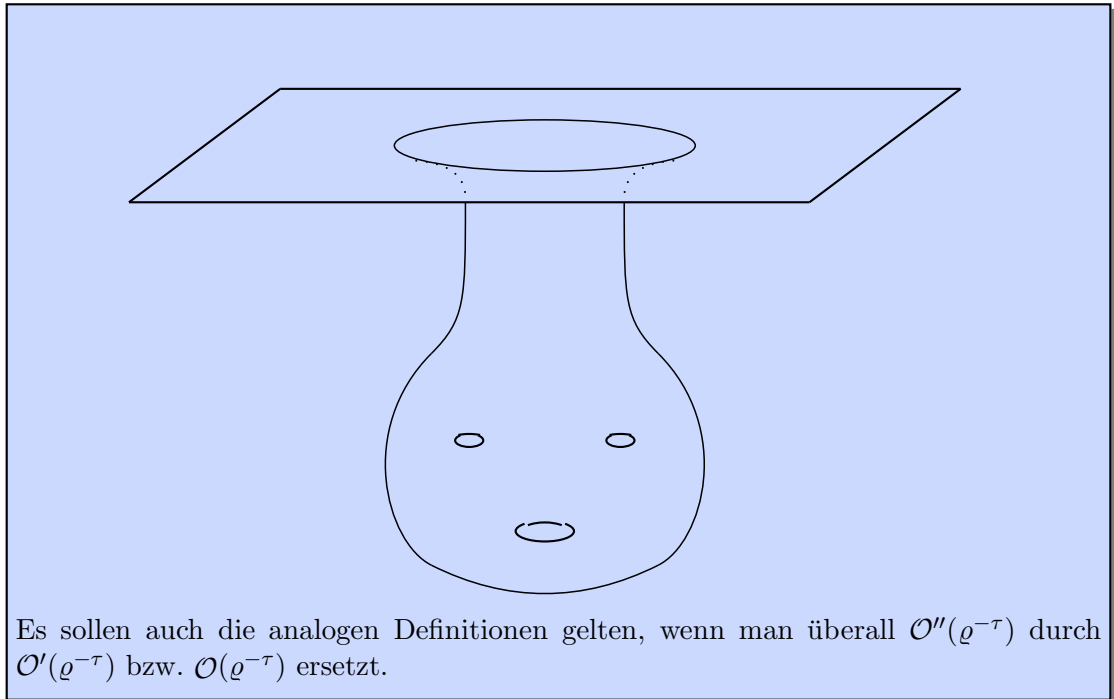
### 5.1.3. Umstülpung kompakter Mannigfaltigkeiten

Nun führen wir eine analoge „Umstülpung“ für geeignete geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeiten ein. Dies führt zu asymptotisch euklidischen Mannigfaltigkeiten, die wir zunächst definieren wollen. Sie werden in Abschnitt 5.3 vertieft und spielen eine wichtige Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie.

**Definition 5.6.** Eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit  $(\widehat{M}, \hat{g})$  heißt *asymptotisch euklidisch von der Ordnung*  $\mathcal{O}''(\varrho^{-\tau})$   $\tau \in \mathbb{R}$ , falls es ein Kompaktum  $K \subset \widehat{M}$ , ein  $R > 0$  und einen Diffeomorphismus  $\psi : \widehat{M} \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_R(0)$  gibt, so dass für die Metrik  $h := (\psi^{-1})^* g$  gilt:

$$h_{ij} - \delta_{ij} \in \mathcal{O}''(\varrho^{-\tau}) \quad \text{für } \varrho \nearrow \infty. \tag{5.9}$$

Die Funktion  $\varrho : \widehat{M} \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varrho(x) := \|\psi(x)\|$  nennen wir die *Radius-Funktion* zur Karte  $\psi$ . Eine Karte  $\psi$ , die obige Eigenschaft erfüllen, nennen wir eine *auf einer Umgebung von  $\infty$  definierte asymptotisch euklidische Karte*.



Wir erhalten solche Mannigfaltigkeiten aus der Umstülpung kompakter Mannigfaltigkeiten.

**Definition 5.7.** Sei  $(M, g)$  wie in Proposition 5.3, sei  $x_0 \in M$  wieder beliebig, und sei  $G$  wie in Proposition 5.3. Setze  $\widehat{M} := M \setminus \{x_0\}$  und  $\widehat{g} := G^{p_c-2} \cdot g$ . Dann heißt  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  die *Umstülpung* von  $(M, g)$  an der Stelle  $x_0$ .

**Bemerkung 5.8.** Nach (2.7) ist

$$\text{scal}^{\widehat{g}} = G^{1-p_c} \cdot Y(G) = 0. \quad (5.10)$$

**Proposition 5.9.** Sei  $(M, g)$ ,  $x_0 \in M$ ,  $G$  wie oben, d. h. wie in Proposition 5.3. Die Funktion  $r$  sei auf einem Ball um  $x_0$  mit genügend kleinem Radius durch  $r(x) := d(x, x_0)$  definiert, und außerhalb dieses Balles sei  $r$  glatt und positiv fortgesetzt. Dann ist  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  asymptotisch euklidisch der Ordnung

$$\begin{cases} 1, & \text{falls } n = 3, \\ 2, & \text{falls } n \geq 4, \\ n - 2, & \text{falls } M \text{ konform flach.} \end{cases}$$

In geeigneten Koordinaten  $y = (y^1, \dots, y^n)$  („umgestülpten konformen Normalkoordi-

natem“) mit Radius-Funktion

$$\varrho := r^{-1} = |y| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (y^j)^2} \quad (5.11)$$

gilt für  $\gamma := r^{n-2} \cdot G$ :

$$\gamma = 1 + A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}) \quad (5.12)$$

$$\det(\widehat{g}_{ij})_{ij} = \gamma^{2p_c} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}) \quad (5.13)$$

$$\widehat{g}_{ij} = \gamma^{p_c-2} \cdot (\delta_{ij} + \mathcal{O}''(\varrho^{-2})) \quad (5.14)$$

$$|\mathrm{d}\varrho|_{\widehat{g}} = \gamma^{(2-p_c)/2}. \quad (5.15)$$

Sei weiter  $\frac{\partial}{\partial \varrho} := \sum_{i=1}^n \frac{y^i}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y^i}$  das zugehörige radiale Vektorfeld und  $S_{\widehat{M}}(\varrho_0) := \varrho^{-1}(\varrho_0)$ . Dann gilt für  $X \in TS_{\widehat{M}}(\varrho_0)$

$$\widehat{g}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}, X\right) = 0 \quad (5.16)$$

Falls  $(M, g)$  konform flach ist, so lässt sich (5.14) zu

$$\widehat{g}_{ij} = \gamma^{p_c-2} \delta_{ij} \quad (5.17)$$

verbessern.

*Beweis.*

- (a) Seien  $x^1, \dots, x^n$  konforme Normalkoordinaten um  $x_0$  wie in Proposition 5.3. Setze  $y^j := r^{-2} \cdot x^j$ ,  $r := |x|$ ,  $\varrho := r^{-1} = |y|$  und (5.11) ist dann bereits klar. Offenichtlich gilt dann auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $y = \text{USA} \circ x$  und  $x = \text{USA} \circ y$ . Deswegen ist es sinnvoll,  $y$  umgestülpte konforme Normalkoordinaten zu nennen.

Nach Proposition 5.3 ist

$$\begin{aligned} \gamma &:= r^{n-2} \cdot G \\ &= r^{n-2} \cdot (r^{2-n} + A + \mathcal{O}''(r)) \\ &= 1 + A \cdot r^{n-2} + \mathcal{O}''(r^{n-1}) \\ &= 1 + A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}). \end{aligned}$$

Somit ist auch (5.12) gezeigt.

- (b) Ab jetzt werden wir Indizes bezüglich der Koordinaten  $x^1, \dots, x^n$  mit  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen und Indizes bezüglich der Koordinaten  $y^1, \dots, y^n$  mit  $i$  und  $j$ . Wie zuvor gilt dann

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} = \varrho^{-2} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{\alpha=1}^n \varrho^{-2} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{ij}(y) &= \widehat{g}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= G^{p_c-2} \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \varrho^{-4} \cdot G^{p_c-2} \cdot g\left(\left(\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \left(\delta_j^\beta - 2\varrho^{-2} y^j y^\beta\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \varrho^{-4} \cdot G^{p_c-2} \cdot \underbrace{g_{\alpha\beta}}_{=\delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}''(r^2)} \cdot (\delta_i^\alpha - 2\varrho^{-2} y^i y^\alpha) \cdot (\delta_j^\beta - 2\varrho^{-2} y^j y^\beta) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n r^4 \cdot G^{p_c-2} \cdot \underbrace{g_{\alpha\beta}}_{=\delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}''(r^2)} \cdot (\delta_i^\alpha - 2r^{-2} x^i x^\alpha) \cdot (\delta_j^\beta - 2r^{-2} x^j x^\beta) \quad (5.18) \\ &= r^4 \cdot G^{p_c-2} \cdot \left(\delta_{ij} - \underbrace{4r^{-2} x^i x^j + 4r^{-4} x^i x^j r^2}_{=0} + \mathcal{O}''(r^2) \cdot \mathcal{O}(1)\right) \\ &= r^4 \cdot G^{p_c-2} \cdot (\delta_{ij} + \mathcal{O}''(r^2)) \\ &\stackrel{\text{Def. } \gamma}{=} r^4 \cdot (r^{2-n} \cdot \gamma)^{p_c-2} \cdot (\delta_{ij} + \mathcal{O}''(r^2)) \\ &= \gamma^{p_c-2} \cdot (\delta_{ij} + \mathcal{O}''(r^2)) \\ &= \gamma^{p_c-2} \cdot (\delta_{ij} + \mathcal{O}''(\varrho^{-2})) . \end{aligned}$$

In der letzten Zeile benutzten wir  $\mathcal{O}''(r^2) = \mathcal{O}''(\varrho^{-2})$ , was im Punkt (c) gezeigt werden soll.

- (c) Wir zeigen nun für  $k \in \mathbb{R}$ :  $\mathcal{O}''(r^k) = \mathcal{O}''(\varrho^{-k})$ . Aus den Definition heraus ist offensichtlich, dass  $\mathcal{O}(r^k) = \mathcal{O}(\varrho^{-k})$ . Um die ersten Ableitungen zu kontrollieren, rechnen wir:

$$|\nabla f|_g = G^{2/(n-2)} |\nabla f|_{\hat{g}} = (1 + \mathcal{O}(1)) r^{-2} |\nabla f|_{\hat{g}},$$

was

$$|\nabla f|_g \in \mathcal{O}(r^{k-1}) \iff |\nabla f|_{\hat{g}} \in \mathcal{O}(\varrho^{-k-1})$$

und somit  $\mathcal{O}'(r^k) = \mathcal{O}'(\varrho^{-k})$  liefert.

Um die zweiten Ableitungen zu kontrollieren, wollen wir eine ähnliche Rechnung durchführen, allerdings mit einem wesentlichen Unterschied:  $\nabla f \in \Omega^1(M)$  ist unabhängig von der riemannschen Metrik, aber nicht  $\nabla^2 f$ . Aus Formel (2.1) ergibt sich mit der Notation  $u = \log G^{2/(n-2)}$

$$\nabla^g \nabla f = \nabla^{\hat{g}} \nabla f + \nabla u \otimes \nabla f + \nabla f \otimes \nabla u - \langle \nabla u, \nabla f \rangle \cdot g,$$

wobei  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  die zu  $g$  duale Metrik auf  $T^*M$  ist. Aus Proposition 5.3 folgt  $\nabla u = \frac{2}{n-2} \frac{\nabla G}{G} \in \mathcal{O}(r^{-1})$ . Wenn wir also  $|\nabla f|_g \in \mathcal{O}(r)$  annehmen, so gilt

$$|\nabla^g \nabla f|_g \in \mathcal{O}(1) \iff |\nabla^{\tilde{g}} \nabla f|_g \in \mathcal{O}(1) \iff |\nabla^{\tilde{g}} \nabla f|_{\tilde{g}} \in \mathcal{O}(\varrho^{-4}).$$

Auf analoge Art und Weise zeigt man  $\mathcal{O}''(r^k) = \mathcal{O}''(\varrho^{-k})$  für alle  $k \in \mathbb{R}$ .

(d) Mit  $\gamma^{p_c-2} = 1 + (p_c - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n})$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij} - \delta_{ij} &= (\gamma^{p_c-2} - 1) \cdot \delta_{ij} + \gamma^{p_c-2} \cdot \mathcal{O}''(\varrho^{-2}) \\ &= (p_c - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot \delta_{ij} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}) + \mathcal{O}''(\varrho^{-2}) \\ &= \mathcal{O}''(\varrho^{2-n}) + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}) + \mathcal{O}''(\varrho^{-2}) \\ &= \mathcal{O}''(\varrho^{2-n}) + \mathcal{O}''(\varrho^{-2}) \\ &= \begin{cases} \mathcal{O}''(\varrho^{-1}) & \text{für } n = 3, \\ \mathcal{O}''(\varrho^{-2}) & \text{für } n \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Ist  $(M, g)$  konform flach, so gilt (nach geeigneter konformer Änderung) in riemannschen Normalkoordinaten  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ , d. h. der  $\mathcal{O}''(r^2)$ -Term in (5.18) fällt weg. Gleichung (5.17) folgt unmittelbar aus der Definition von  $\gamma$  und der Konstruktion von  $\hat{g}$ . Es folgt dann mit (5.8) in umgestülpten konformen Normalkoordinaten

$$\hat{g}_{ij} - \delta_{ij} = (\gamma^{p_c-2} - 1) \delta_{ij} = \mathcal{O}''(\varrho^{2-n}).$$

also  $\tau = n - 2$ .

(f) In der Beweisskizze von Proposition 5.3 wurde für jedes  $N \geq n - 1$  eine Metrik  $g$  gewählt, so dass in  $g$ -Normalkoordinaten (also: in konformen Normalkoordinaten bis auf  $\mathcal{O}''(r^N)$ -Terme) gilt

$$\det(g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = 1 + \mathcal{O}''(r^N),$$

falls  $n \in \{3, 4, 5\}$ . Der Term  $\mathcal{O}''(r^N)$  verschwindet im konform flachen Fall, gilt also insbesondere für alle  $N \geq n - 1$ . Die Inversion  $x \mapsto y = x/|x|^2$  ist konform mit dem konformen Streckfaktor  $r^{-2} = |x|^{-2} = \varrho^2$ . Somit erhalten wir in umgestülpten konformen Normalkoordinaten  $\det(g_{ij})_{ij} = (1 + \mathcal{O}''(\varrho^{-N})) \varrho^{-4n}$ . Mit  $G = \gamma \varrho^{n-2}$  folgt in umgestülpten Koordinaten:

$$\begin{aligned} \det(\hat{g}_{ij})_{ij} &= \underbrace{G^{m(p_c-2)}}_{=G^{4n/(n-2)}} \det(g_{ij})_{ij} = \gamma^{4n/(n-2)} \varrho^{4n} \det(g_{ij})_{ij} \\ &= \gamma^{2p_c} (1 + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n})) \end{aligned}$$

(g) Wir haben  $d\varrho = -r^{-2} dr$ , somit auf Grund des Gauß-Lemmas

$$|d\varrho|_{\hat{g}}^2 = r^{-4} |dr|_{\hat{g}}^2 = r^{-4} G^{2-p_c} \underbrace{|dr|_g^2}_{=1} = \gamma^{2-p_c} |dr|_g^2,$$

weil  $-4 = (2 - p_c)(n - 2)$ .

- (h) Seien  $x$  und  $y$  die oben definierten Karten, und wir schreiben  $S_{\widehat{M}}(\varrho_0)$  für die Menge aller  $y \in \widehat{M}$  mit  $\varrho(y) = \varrho_0$ . Sei  $S^{n-1}(r_0) \subset \mathbb{R}^n$  die Sphäre von Radius  $r_0$  um 0. Sei  $m \in S_{\widehat{M}}(\varrho_0)$ , d. h.  $\varrho(m) = \varrho_0 = 1/r(m)$ . Nach Definition von  $S_{\widehat{M}}(\varrho_0)$  bildet  $dy$  den Raum  $T_m S_{\widehat{M}}(\varrho_0)$  isomorph auf  $T_{y(m)} S^{n-1}(\varrho_0)$  ab. Wegen  $y = \text{USA} \circ x$  sieht man auch leicht, dass  $dx$  den Raum  $T_m S_{\widehat{M}}(\varrho_0)$  isomorph auf  $T_{x(m)} S^{n-1}(1/\varrho_0)$  abbildet. Da die  $x$ -Koordinaten  $g$ -Normalkoordinaten sind, folgt daraus mit dem Gauß-Lemma, dass  $T_m S_{\widehat{M}}(\varrho_0)$  das orthogonale Komplement zu  $\frac{\partial}{\partial r}$  ist. In anderen Worten: für alle  $X \in TS_{\widehat{M}}(\varrho_0)$  gilt  $g(X, \frac{\partial}{\partial r}) = 0$ .

Wenn wir nun  $\frac{\partial}{\partial \varrho} = \frac{\partial r}{\partial \varrho} \frac{\partial}{\partial r} = -r^2 \frac{\partial}{\partial r}$  verwenden, so erhalten wir

$$\hat{g}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}, X\right) = G^{p_c-2} g\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}, X\right) = -G^{p_c-2} r^2 g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = 0.$$

□

## 5.2. Die Test-Funktionen

Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit wie in Proposition 5.3,  $x_0 \in M$  und sei  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  die in Definition (5.7) definierte Umstülpung, welche eine asymptotisch euklidische Mannigfaltigkeit ist. Wir konstruieren – unter der Annahme  $A > 0$  – in diesem Abschnitt Test-Funktionen  $\varphi_\alpha \in H^{1,2}(\widehat{M})$  für genügend große  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so dass  $E^{\widehat{g}}(\varphi_\alpha) < \lambda(S^n)$ . Unser Beweis ist inspiriert von [44, Proposition 7.1], unser Zugang benötigt aber keine so detaillierten Informationen über den Abfall der Ableitungen. Aus dieser Ungleichung folgt dann die Aubin–Schoen-Ungleichung und somit eine Lösung des Yamabe-Problems. Die Konstante  $A$  wird später näher untersucht. Sie stimmt im wesentlichen mit der ADM-Masse von  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  überein, die wir in Abschnitt 5.3 diskutieren werden. Der Satz von der positiven Masse wird dann die noch fehlende Positivität von  $A$  liefern.

Zur Konstruktion und Diskussion dieser Test-Funktionen arbeiten wir in Koordinaten  $y^1, \dots, y^n$  wie in Proposition 5.9, und sei  $R$  wie in Definition 5.6 gegeben. Wir definieren wie in Abschnitt 2.3, mit  $y$  statt  $x$ :

$$u_\alpha(y) = \left( \frac{2\alpha}{|y|^2 + \alpha^2} \right)^{(n-2)/2} = \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{(n-2)/2}.$$

Wir setzen:

$$\varphi_\alpha(y) := \begin{cases} u_\alpha(y) & \text{für } y \notin K, \text{ und somit auch } |y| > R, \\ \left( \frac{2\alpha}{R^2 + \alpha^2} \right)^{(n-2)/2} & \text{für } y \in K. \end{cases} \quad (5.19)$$

### Bemerkung 5.10.

- (a)  $\varphi_\alpha$  ist stetig auf  $\widehat{M}$  und glatt auf  $\widehat{M} \setminus \partial K$ . Weiter existiert  $\nabla \varphi_\alpha$  als  $T^*M$ -wertige Distribution auf  $\widehat{M}$  und ist durch einen  $L^1_{\text{loc}}$ -Schnitt von  $T^*M$  gegeben.



- (b) In den Fällen  $n = 3$  und  $n = 4$  ist  $\varphi_\alpha$  nicht in  $L^2$  und deswegen auch nicht in  $H^{1,2}$ . Deswegen ist bei einigen der folgenden Argumente Vorsicht geboten.

**Proposition 5.11.** *Sei wieder  $(M, g)$  wie in Proposition 5.3,  $x_0 \in M$ , mit einer Umstülpung  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  wie in Definition 5.7. Sei  $R$  wieder wie in Definition 5.6. Dann gilt  $\nabla \varphi_\alpha \in L^2(\widehat{M})$  und  $\varphi_\alpha \in L^{p_c}(\widehat{M})$ . Außerdem gibt es ein  $C > 0$ , so dass für  $\alpha \rightarrow \infty$  gilt:*

$$E^{\widehat{g}}(\varphi_\alpha) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) \cdot \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}}^2 - C \cdot A \cdot \alpha^{2-n} + \mathcal{O}(\alpha^{1-n}). \quad (5.20)$$

Hierbei müssen wir die Definition von  $E^{\widehat{g}}$  in (2.10) etwas modifizieren, da  $\widehat{M}$  nicht kompakt ist. Da wir  $\text{scal}^{\widehat{g}} = 0$  haben, wählen wir die Definition:

$$E^{\widehat{g}}(f) := \int_{\widehat{M}} \left( a |df|_{\widehat{g}}^2 + f^2 \text{scal}^{\widehat{g}} \right) d\text{vol}^{\widehat{g}} = a \int_{\widehat{M}} |df|_{\widehat{g}}^2 d\text{vol}^{\widehat{g}} \in [0, \infty]$$

*Beweis.*

- (a) Sei wieder  $R > 0$  und  $\psi : \widehat{M} \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_R(0)$  wie in Definition 5.6, und sei  $\varrho$  die zugehörige Radius-Funktion. Sei  $\text{Inn}(K)$  das Innere von  $K$ . Durch potentielle Vergrößerung von  $R$  können wir annehmen, dass  $\widehat{M} \setminus \text{Inn}(K)$  eine Mannigfaltigkeit mit (glatten) Rand ist und dass  $\psi : \widehat{M} \setminus \text{Inn}(K) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$  ein Diffeomorphismus ist.

Auf  $\widehat{M} \setminus \text{Inn}(K)$  betrachten wir sowohl die Metrik  $\widehat{g}$  als auch die zurückgezogene euklidische Metrik  $g_0 := \psi^* g_{\text{eukl}}$ , mit der wir selbstverständlich wie mit der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  rechnen können. Das zu  $\widehat{g}$  bzw.  $g_0$  gehörende Volumenelement  $\widehat{M} \setminus \text{Inn}(K)$  notieren wir als  $d\text{vol}^{\widehat{g}}$  bzw.  $d\text{vol}^0$ . Das Volumenelement einer Hyperfläche bezeichnen wir mit  $d\text{vol}_{n-1}^{\widehat{g}}$  bzw.  $d\text{vol}_{n-1}^0$ . Analog werden die Laplace-Operatoren mit  $\Delta^{\widehat{g}}$  bzw.  $\Delta_0$  bezeichnet. Ist  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , so ist  $\nabla \varphi$  eine 1-Form, deren Norm bezüglich  $\widehat{g}$  bzw.  $g_0$  mit  $|\nabla \varphi|_{\widehat{g}}$  bzw.  $|\nabla \varphi|_0$  bezeichnet wird.

Aus (5.13) erhalten wir

$$d\text{vol}^{\widehat{g}} = v d\text{vol}^0 = \left( \gamma^{p_c} + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n}) \right) d\text{vol}^0, \quad (5.21)$$

wobei wieder  $v := \sqrt{\det(\widehat{g}_{ij})_{ij}}$  und mit (5.13) gilt  $v = \gamma^{p_c} + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})$ .

Für radiale Funktionen  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{M} \setminus \text{Inn}(K))$ , das heißt für Funktionen der Form  $\varphi = w \circ \varrho$ , bekommen wir aus Gleichung (5.15)

$$|\nabla \varphi|_{\widehat{g}} = |w'(\varrho)| |\nabla \varrho|_{\widehat{g}} = |w'(\varrho)| \gamma^{(2-p_c)/2} \underbrace{|\nabla \varrho|_0}_{=1} = \gamma^{(2-p_c)/2} |\nabla \varphi|_0. \quad (5.22)$$

Dies gilt insbesondere für  $\varphi = \varphi_\alpha$ .

Für  $\tilde{\varrho} \geq R$  sei wieder

$$S_{\widehat{M}}(\tilde{\varrho}) := \{x \in \widehat{M} \setminus \text{Inn}(K) \mid \varrho(x) = \tilde{\varrho}\}.$$

Für  $L > R$  definieren wir weiterhin das Ringgebiet

$$A_R^L := \psi^{-1}(\bar{B}_L(0) \setminus B_R(0)) = \bigcup_{R \leq \tilde{\varrho} \leq L} S_{\widehat{M}}(\tilde{\varrho}).$$

(b)

$$\|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^{p_c} = \left(\frac{2\alpha}{R^2 + \alpha^2}\right)^{p_c \frac{(n-2)}{2}} \text{vol}(K, \hat{g}) + \int_R^\infty \left(\frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2}\right)^{p_c \frac{(n-2)}{2}} v \varrho^{n-1} d\varrho.$$

Wegen  $v = \gamma^{p_c} + \mathcal{O}(\varrho^{1-n}) = 1 + \mathcal{O}(\varrho^{2-n})$  gilt  $C := \sup\{v(y) \mid y \in \widehat{M} \setminus \text{Inn}(K)\} < \infty$ . Mit  $R^2 + \alpha^2 \geq \alpha^2$ ,  $p_c = 2n/(n-2)$  und der Substitution  $\varrho = \sigma\alpha$  folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^{p_c} &\leq 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K, \hat{g}) + C \int_R^\infty \left(\frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2}\right)^n \varrho^{n-1} \omega_{n-1} d\varrho \\ &= 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K, \hat{g}) + C \omega_{n-1} \int_{R/\alpha}^\infty 2^n \alpha^{-n} (\sigma^2 + 1)^{-n} \alpha^{n-1} \sigma^{n-1} \alpha d\sigma \\ &\leq 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K, \hat{g}) + C \omega_{n-1} \int_0^\infty \left(\frac{2}{\sigma^2 + 1}\right)^n \sigma^{n-1} d\sigma \\ &\leq 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K, \hat{g}) + C \|u_1\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}^{p_c} = 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K, \hat{g}) + C \omega_n, \end{aligned}$$

wobei wir Beispiel 2.33 für den expliziten Wert benutzt haben. Somit gilt insbesondere  $\varphi_\alpha \in L^{p_c}$ .

(c) Aus (5.19), aus  $\text{scal}^{\hat{g}} = 0$  und aus der Tatsache, dass  $\varphi_\alpha$  auf  $K$  konstant ist, folgt

$$\begin{aligned} E^{\hat{g}}(\varphi_\alpha) &\stackrel{(\text{def})}{=} \int_{\widehat{M}} a |\nabla \varphi_\alpha|_{\hat{g}}^2 d\text{vol}^{\hat{g}} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{A_R^L} a |\nabla \varphi_\alpha|_{\hat{g}}^2 d\text{vol}^{\hat{g}} \\ &\stackrel{(5.21), (5.22)}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{A_R^L} a |\nabla \varphi_\alpha|_0^2 (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) d\text{vol}^0 \end{aligned}$$

Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned} &\int_{A_R^L} a |\nabla \varphi_\alpha|_0^2 (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) d\text{vol}^0 \\ &= \int_{A_R^L} a \varphi_\alpha (\Delta_0 \varphi_\alpha) (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) d\text{vol}^0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$- \int_{A_R^L} a \varphi_\alpha g_0 \left( \nabla \varphi_\alpha, \nabla (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) \right) d\text{vol}^0 \tag{5.24}$$

$$+ \int_{S_L} a \varphi_\alpha (\nabla_{\partial_\varrho} \varphi_\alpha) (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) \, \mathrm{dvol}_{n-1}^0 \quad (5.25)$$

$$- \int_{S_R} a \varphi_\alpha (\nabla_{\partial_\varrho} \varphi_\alpha) (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) \, \mathrm{dvol}_{n-1}^0. \quad (5.26)$$

Hierbei ist  $\partial_\varrho$  der euklidische Normalenvektor, der am Rand  $S_L$  nach außen und am Rand  $S_R$  nach innen zeigt. Wir betrachten nun jeden der vier Summanden getrennt. Man beachte, dass alle Terme  $\mathcal{O}'(\varrho^{1-n})$  in diesem und den folgenden Teilen des Beweises von  $\alpha$  unabhängig sind.

- (d) Wie in Beispiel 2.33 erklärt, gilt  $\Delta_0 \varphi_\alpha = \frac{1}{4} n(n-2) \varphi_\alpha^{p_c-1}$  und somit  $a \Delta_0 \varphi_\alpha = n(n-1) \varphi_\alpha^{p_c-1}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} (5.23) &= n(n-1) \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} (\gamma^2 + \mathcal{O}(\varrho^{1-n})) \, \mathrm{dvol}^0 \\ &= n(n-1) \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c-2} \left( \varphi_\alpha (\gamma + \mathcal{O}(\varrho^{1-n})) \right)^2 \, \mathrm{dvol}^0 \\ &\stackrel{(*)}{\leq} n(n-1) \left( \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} \, \mathrm{dvol}^0 \right)^{1-2/p_c} \left( \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} (\gamma^{p_c} + \mathcal{O}(\varrho^{1-n})) \, \mathrm{dvol}^0 \right)^{2/p_c} \\ &= n(n-1) \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(A_R^L, \mathrm{dvol}^0)}^{p_c-2} \left( \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} (1 + \mathcal{O}(\varrho^{1-n})) \, \mathrm{dvol}^{\hat{g}} \right)^{2/p_c} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der Ungleichung  $(*)$  die Hölder-Ungleichung mit dem Koeffizienten  $p_c/2$  und dem dazu assoziierten Koeffizienten  $(1-2/p_c)^{-1} = p_c/(p_c-2)$  angewandt. Wir rechnen weiter mit  $2/p_c = (n-2)/n$  und der Ungleichung  $(a+b)^{(n-2)/n} \leq a^{(n-2)/n} + \frac{n-2}{n} a^{-2/n} b$ ,  $a > 0$ ,  $b > -a$

$$\begin{aligned} (5.23) &\leq n(n-1) \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(A_R^L, \mathrm{dvol}^0)}^{4/(n-2)} \\ &\quad \cdot \left( \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(A_R^L, \hat{g})}^2 + \frac{n-2}{n} \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(A_R^L, \hat{g})}^{-4/(n-2)} \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} \cdot \mathcal{O}(\varrho^{1-n}) \, \mathrm{dvol}^{\hat{g}} \right) \\ &\leq \underbrace{n(n-1) \|u_\alpha\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}^{4/(n-2)}}_{=\lambda(\mathbb{S}^n)} \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^2 \\ &\quad + (n-1)(n-2) \tilde{C} \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} \cdot \mathcal{O}(\varrho^{1-n}) \, \mathrm{dvol}^{\hat{g}}, \quad (5.27) \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{C} := \max \left\{ \frac{1}{\gamma(y)} \mid \varrho(y) \geq R \right\}^{4/(n-2)} \geq \left( \frac{\|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(A_R^L, \mathrm{dvol}^0)}}{\|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(A_R^L, \hat{g})}} \right)^{4/(n-2)}.$$

Wir werden den Fehlerterm in (i) weiter abschätzen.

(e) Um die Summanden (5.25) und (5.26) zu kontrollieren, berechnen wir

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha \nabla_{\partial_\varrho} \varphi_\alpha &= \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{(n-2)/2} \frac{2-n}{2} \cdot \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n/2} \\ &= \frac{2-n}{2} \cdot \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n-1},\end{aligned}\tag{5.28}$$

und deswegen erhalten wir beide folgenden Abschätzungen

$$|\varphi_\alpha \nabla_{\partial_\varrho} \varphi_\alpha| \leq \begin{cases} C\alpha^{n-2}\varrho^{3-2n} \\ C\alpha^{-n}\varrho \end{cases}$$

für eine Konstante  $C > 0$ .

Für den Summanden (5.25) fixieren wir zunächst  $\alpha$  und betrachten den Grenzwert  $L \rightarrow \infty$ . Da  $\gamma^2 + \mathcal{O}(\varrho^{1-n})$  beschränkt ist, erhalten wir ein  $c_1 > 0$  mit

$$|(5.25)| \leq c_1 \alpha^{n-2} L^{3-2n} L^{n-1} \rightarrow 0 \text{ für } L \rightarrow \infty.$$

Dieser Summand ergibt also im Grenzwert keinen Beitrag zur Energie  $E^{\hat{g}}(\varphi_\alpha)$ .

Um den Summanden (5.26) abzuschätzen, beachte man, dass  $R$  fixiert ist. Wir erhalten eine Konstante  $c_2 > 0$  – die wie alle Konstanten in diesem Beweis – von  $R$  abhängen darf, so dass

$$|(5.26)| \leq c_2 \alpha^{-n} = \mathcal{O}(\alpha^{-n}) \text{ für } \alpha \rightarrow \infty.$$

(f) Der verbleibende Summand (5.24) wird letztendlich den gewünschten Term  $C \cdot A \cdot \alpha^{2-n}$  mit negativem Vorzeichen liefern. Als Vorbereitung zur Behandlung dieses Terms, definieren und studieren wir die *relative Sphären-Wachstumsfunktion*

$$h(\varrho) := \frac{\varrho^{1-n}}{\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_\varrho} \mathrm{dvol}_{n-1}^{\hat{g}}$$

Es gilt  $\nabla \varrho = \mathrm{d}\varrho$  und

$$\mathrm{dvol}^{\hat{g}} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{|\mathrm{d}\varrho|_{\hat{g}}} \wedge \mathrm{dvol}_{n-1}^{\hat{g}}, \quad \mathrm{dvol}^0 = \frac{\mathrm{d}\varrho}{|\mathrm{d}\varrho|_0} \wedge \mathrm{dvol}_{n-1}^0.$$

Mithilfe von (5.21) und (5.22) erhalten wir hieraus

$$\mathrm{dvol}_{n-1}^{\hat{g}} = v\gamma^{(2-p_c)/2} \mathrm{dvol}_{n-1}^0 = \left( \gamma^{(p_c+2)/2} + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n}) \right) \mathrm{dvol}_{n-1}^0.$$

Man rechnet leicht nach, dass  $p_c + 2 = a$ , und somit erhalten wir

$$h(\varrho) = \frac{\varrho^{1-n}}{\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_\varrho} \left( \gamma^{a/2} + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n}) \right) d\text{vol}_{n-1}^0 \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\varrho^{1-n}}{\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_\varrho} \left( 1 + \frac{a}{2} \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n}) \right) d\text{vol}_{n-1}^0 \\ &= 1 + \frac{a}{2} \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Wir berechnen  $h'(\varrho)$  auf zwei Arten. In der ersten Berechnung erhalten wir aus der Ableitung von (5.30):

$$\begin{aligned} h'(\varrho) &= \frac{a}{2} \cdot (2-n) \cdot A \cdot \varrho^{1-n} + \mathcal{O}(\varrho^{-n}), \\ &= -2(n-1) \cdot A \cdot \varrho^{1-n} + \mathcal{O}(\varrho^{-n}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

In der zweiten Berechnung leiten wir (5.29) ab. Wir nutzen hierbei, dass  $\varrho^{1-n} d\text{vol}_{n-1}^0$  nach Identifikation  $S_\varrho \cong S^{n-1}$  homogen von Grad 0 ist und deswegen keine Ableitungsterme ergibt, und erhalten:

$$\begin{aligned} h'(\varrho) &= \frac{a}{2} \frac{\varrho^{1-n}}{\omega_{n-1}} \int_{S_\varrho} \left( \gamma^{(a/2)-1} \partial_\varrho \gamma + \mathcal{O}(\varrho^{-n}) \right) d\text{vol}_{n-1}^0 \\ &= \frac{a}{2} \frac{\varrho^{1-n}}{\omega_{n-1}} \int_{S_\varrho} (\partial_\varrho \gamma + \mathcal{O}(\varrho^{-n})) d\text{vol}_{n-1}^0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

In der letzten Gleichung nutzten wir  $(\gamma^{(a/2)-1} - 1) \partial_\varrho \gamma = \mathcal{O}(\varrho^{2-n+1-n})$ , und mit  $n \geq 3$  folgt dann auch, dass es in  $\mathcal{O}(\varrho^{-n})$  liegt.

- (g) Den Grenzwert des Summanden (5.24) für  $L \rightarrow \infty$  nennen wir im folgenden  $\Lambda_R(\alpha)$  und rechnen:

$$\begin{aligned} \Lambda_R(\alpha) &:= \lim_{L \rightarrow \infty} (5.24) \\ &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{A_R^L} a \varphi_\alpha g_0 \left( \nabla \varphi_\alpha, \nabla (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) \right) d\text{vol}^0 \\ &= - \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{A_R^L} a \varphi_\alpha \partial_\varrho \varphi_\alpha \partial_\varrho (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) d\text{vol}^0 \\ &= - \int_R^\infty \varphi_\alpha \partial_\varrho \varphi_\alpha \int_{S_\varrho} a \partial_\varrho (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) d\text{vol}_{n-1}^0 d\varrho \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
& \int_{S_\varrho} a \partial_\varrho (\gamma^2 + \mathcal{O}'(\varrho^{1-n})) \, \mathrm{dvol}_{n-1}^0 \\
&= \int_{S_\varrho} (2a \gamma \partial_\varrho \gamma + \mathcal{O}(\varrho^{-n})) \, \mathrm{dvol}_{n-1}^0 \\
&= \int_{S_\varrho} (2a \partial_\varrho \gamma + \mathcal{O}(\varrho^{-n})) \, \mathrm{dvol}_{n-1}^0 \\
&\stackrel{(5.32)}{=} (4h'(\varrho) + \mathcal{O}(\varrho^{-n})) \varrho^{n-1} \omega_{n-1} \\
&\stackrel{(5.31)}{=} -8((n-1) \cdot A \cdot \varrho^{1-n} + \mathcal{O}(\varrho^{-n})) \varrho^{n-1} \omega_{n-1}
\end{aligned}$$

Mit (5.28) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\Lambda_R(\alpha) &= \int_R^\infty \frac{2-n}{2} \cdot \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n-1} 8((n-1) \cdot A \cdot \varrho^{1-n} + \mathcal{O}(\varrho^{-n})) \varrho^{n-1} \omega_{n-1} \, \mathrm{d}\varrho \\
&= -4(n-1)(n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot A \cdot \int_R^\infty \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n-1} (1 + \mathcal{O}(\varrho^{-1})) \, \mathrm{d}\varrho
\end{aligned}$$

(h) Durch Substitution  $\varrho = \sigma\alpha$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_R^\infty \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n-1} \varrho^\ell \, \mathrm{d}\varrho &= \int_{R/\alpha}^\infty \sigma 2^{n-1} \alpha^{1-n} (\sigma^2 + 1)^{1-n} \alpha^\ell \sigma^\ell \alpha \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \alpha^{2+\ell-n} 2^{n-1} \int_{R/\alpha}^\infty \sigma^{\ell+1} (\sigma^2 + 1)^{1-n} \, \mathrm{d}\sigma \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Für  $-2 < \ell < 2n - 4$  gilt im Sinne des uneigentlichen Riemann-Integrals einer positiven Funktion (und damit auch im Lebesgueschen Sinne)

$$B_\ell := 2^{n-1} \int_0^\infty \sigma^{\ell+1} (\sigma^2 + 1)^{1-n} \, \mathrm{d}\sigma < \infty.$$

Für  $\ell > -2$  gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^{R/\alpha} \sigma^{\ell+1} (\sigma^2 + 1)^{1-n} \, \mathrm{d}\sigma \leq \int_0^{R/\alpha} \sigma^{\ell+1} \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{\ell+2} \left( \frac{R}{\alpha} \right)^{\ell+2} = \mathcal{O}(\alpha^{-\ell-2}). \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Aus (5.33) und (5.34) erhalten wir nun für  $\ell = 0$  im Limes  $\alpha \rightarrow \infty$ :

$$\int_R^\infty \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n-1} d\sigma = B_0 \alpha^{2-n} + \mathcal{O}(\alpha^{-n}).$$

Um die Fehlerterm zu kontrollieren, setzen wir  $\ell = -1$  und erhalten aus (5.33) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_R^\infty \frac{\varrho}{\alpha} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{n-1} \cdot \mathcal{O}(\varrho^{-1}) d\sigma \\ & \leq \alpha^{1-n} B_{-1} = \mathcal{O}(\alpha^{1-n}) \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also:

$$\Lambda_R(\alpha) = - \underbrace{4(n-1)(n-2) \cdot \omega_{n-1} \cdot B_0}_{C:=} \cdot A \cdot \alpha^{2-n} + \mathcal{O}(\alpha^{1-n}). \quad (5.35)$$

- (i) Ähnlich schätzen wir den verbleibenden Fehlerterm aus Teil (d) ab, wobei  $\hat{C}$  eine positive Konstante ist:

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_R^L} \varphi_\alpha^{p_c} \cdot \mathcal{O}(\varrho^{1-n}) d\text{vol}^{\hat{g}} \right| & \leq \int_R^L \hat{C} \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^{\frac{n-2}{2}p_c} \varrho^{1-n} \omega_{n-1} \varrho^{n-1} d\varrho \\ & = \int_R^L \hat{C} \left( \frac{2}{\alpha} \right)^n \left( \frac{1}{(\varrho/\alpha)^2 + 1} \right)^n \omega_{n-1} d\varrho \\ & \leq 2^n \cdot \hat{C} \cdot \omega_{n-1} \int_{R/\alpha}^\infty \alpha^{-n} (\sigma^2 + 1)^{-n} \alpha d\sigma = \mathcal{O}(\alpha^{1-n}). \end{aligned}$$

Die  $\mathcal{O}(\alpha^{1-n})$ -Terme sind uniform in  $L$  abgeschätzt. Deswegen erhalten wir mit (5.27)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (5.23) \leq \lambda(\mathbb{S}^n) \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^2 + \mathcal{O}(\alpha^{1-n}) \quad (5.36)$$

- (j) Aus Teil (c), Abschätzungen (5.36), (5.35) und Teil (e) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} E^{\hat{g}}(\varphi_\alpha) & \leq \lambda(\mathbb{S}^n) \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^2 + \mathcal{O}(\alpha^{1-n}) \\ & \quad - C \cdot A \cdot \alpha^{2-n} + \mathcal{O}(\alpha^{1-n}) + \mathcal{O}(\alpha^{-n}) \\ & \leq \lambda(\mathbb{S}^n) \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^2 - C \cdot A \cdot \alpha^{2-n} + \mathcal{O}(\alpha^{1-n}) \end{aligned}$$

Wir haben Abschätzung (5.20) gezeigt und daraus ergibt sich auch  $\nabla \varphi_\alpha \in L^2(\widehat{M})$ .

□

**Bemerkung 5.12.** Man kann Beweisteil (b) erweitern zu der Aussage:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^{p_c} = \omega_n. \quad (5.37)$$

Wir benötigen diese Aussage zwar nicht im weiteren Verlauf des Buchs, wollen aber im Sinne eines guten Überblicks einen Beweis geben.

Wegen  $v = \gamma^{p_c} + \mathcal{O}(\varrho^{1-n}) = 1 + \mathcal{O}(\varrho^{2-n})$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $R_0$ , so dass  $1 - \varepsilon \leq v \leq 1 + \varepsilon$  auf  $\widehat{M} \setminus K_\varepsilon$ , wobei  $K_\varepsilon := K \cup \{x \in \widehat{M} \setminus K \mid \varrho(x) \leq R_0\}$ . Mit derselben Argumentation wie oben mit  $R_0$  an Stelle von  $R$  und  $K_\varepsilon$  an Stelle von  $K$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^{p_c} &\leq 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K_\varepsilon, \hat{g}) + (1 + \varepsilon) \omega_{n-1} \int_{R_0}^\infty \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^n \varrho^{n-1} d\varrho \\ &\leq 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K_\varepsilon, \hat{g}) + (1 + \varepsilon) \omega_{n-1} \int_0^\infty \left( \frac{2}{\sigma^2 + 1} \right)^n \sigma^{n-1} d\sigma \\ &\leq 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K_\varepsilon, \hat{g}) + (1 + \varepsilon) \|u_1\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n)}^{p_c} = 2^n \alpha^{-n} \text{vol}(K_\varepsilon, \hat{g}) + (1 + \varepsilon) \omega_n. \end{aligned}$$

Ähnlich bekommen wir auch eine uniforme untere  $L^{p_c}$ -Schranke für alle  $\alpha \geq R_0$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})}^{p_c} &\geq (1 - \varepsilon) \int_{R_0}^\infty \left( \frac{2\alpha}{\varrho^2 + \alpha^2} \right)^n \varrho^{n-1} d\varrho \\ &= (1 - \varepsilon) \int_{R_0/\alpha}^\infty \alpha^{-n} \left( \frac{2}{\sigma^2 + 1} \right)^n \alpha^{n-1} \sigma^{n-1} \alpha d\sigma \\ &\geq (1 - \varepsilon) \int_{R_0/\alpha}^\infty \left( \frac{2}{\sigma^2 + 1} \right)^n \sigma^{n-1} d\sigma \\ &\geq (1 - \varepsilon) \|u_1\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^n \setminus B_{R_0/\alpha}(0))}^{p_c} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon) \omega_n. \quad \square \end{aligned}$$

Aus Proposition 5.11 erhalten wir nun den folgenden Satz von Schoen, der als der wesentliche Durchbruch für die Lösung des Yamabe-Problems anzusehen ist. Durch seine Publikation wurde die Relevanz des Positive-Masse-Theorems für die konforme Geometrie offensichtlich. Da man keine großen Schwierigkeiten erwartete, den bereits in niedrigen Dimensionen ausgearbeiteten Beweis des Satzes von der positiven Masse auf beliebige Dimensionen zu verallgemeinern, betrachteten vermutlich viele Experten das Yamabe-Problem als gelöst. Als sich danach in hohen Dimensionen Schwierigkeiten bei der Verallgemeinerung des Satzes von der positiven Masse ergaben, publizierten Schoen und Yau [54] eine neue Beweis-Methode für diesen Satz für konform flache Mannigfaltigkeiten, der andere Methoden nutzt, welche nur für konform flache Mannigfaltigkeiten anwendbar sind.

Der folgende Satz ist nun mit wenig Aufwand zu zeigen, denn die essenziellen Vorarbeiten werden bereits durch Proposition 5.11 bereitgestellt.

**Satz 5.13 (Schoen [50]).** *Sei  $(M, g)$  wie in Proposition 5.3. Existiert ein Punkt  $x_0 \in M$  mit  $A > 0$  in der Taylor-Entwicklung (5.4) der Green-Funktion des Yamabe-Operators  $Y$  um  $x_0$ , so ist  $\lambda(M, [g]) < \lambda(\mathbb{S}^n)$ . Insbesondere ist das Yamabe-Problem dann lösbar.*



*Beweis.*

Für das gegebene  $x_0$  definieren wir wieder die Umstülpung  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  wie in Definition (5.7). Für die oben konstruierten Test-Funktionen  $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{M})$  gilt: ist  $A > 0$ , so ist für ein hinreichend großes  $\alpha$ :

$$Q^{\widehat{g}}(\varphi_\alpha) < \lambda(\mathbb{S}^n)$$

Mit dem unten stehenden Lemma 5.15 finden wir dann eine glatte Abschneidefunktion  $\eta : \widehat{M} \rightarrow [0, 1]$  mit kompaktem Träger, so dass

$$Q^{\widehat{g}}(\eta\varphi_\alpha) < \lambda(\mathbb{S}^n).$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} \lambda(M, [g]) &= \inf \{ Q^g(\psi) \mid \psi \in H^{1,2}(M) \setminus \{0\} \} \\ &\leq \inf \{ Q^g(\psi) \mid \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(M \setminus \{x_0\}) \setminus \{0\} \} \\ &= \inf \{ Q^{\widehat{g}}(\psi) \mid \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\widehat{M}) \setminus \{0\} \} \\ &\leq Q^{\widehat{g}}(\eta\varphi_\alpha) \\ &< \lambda(\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.14.** Ein alternativer Beweis von Satz 5.13 wird in Unterabschnitt 6.6.1 gegeben.

**Lemma 5.15.** Sei  $\varphi \in L^{p_c}(\widehat{M}, \widehat{g})$  gegeben mit  $\nabla \varphi \in L^2(\widehat{M}, \widehat{g})$ . Dann gibt es zu jedem  $L \geq R > 0$  eine glatte Funktion  $\eta_L : \widehat{M} \rightarrow [0, 1]$  mit kompaktem Träger, so dass

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q^{\widehat{g}}(\eta_L \varphi) = Q^{\widehat{g}}(\varphi).$$

Im Beweis des Lemmas nutzen wir ähnliche Techniken wie in den Unsichtbarkeitsresultaten in Abschnitt 3.2.

*Beweis.*

Zu jeder Zahl  $L \geq R$  wählen wir eine glatte Abschneidefunktion

$$\eta_L : \widehat{M} \rightarrow [0, 1],$$

die auf  $K$  und für  $\varrho \leq L$  konstant 1 ist und Träger in  $K \cup \{y \mid \varrho(y) \leq 2L\}$  hat. Man kann  $\eta_L$  so wählen, dass  $|\nabla \eta_L|_{\widehat{g}} \leq 2L^{-1}$ . Offensichtlich gilt dann wegen dominanter Konvergenz

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \|\eta_L \varphi\|_{L^{p_c}} = \|\varphi\|_{L^{p_c}}.$$

Es gilt andererseits

$$\begin{aligned}
 \left| \sqrt{E^{\hat{g}}(\eta_L \varphi)} - \sqrt{E^{\hat{g}}(\varphi)} \right| &= \left| \|\nabla(\eta_L \varphi)\|_{L^2} - \|\nabla \varphi\|_{L^2} \right| \\
 &= \left| \|(\nabla \eta_L) \varphi + \eta_L(\nabla \varphi)\|_{L^2} - \|\nabla \varphi\|_{L^2} \right| \\
 &\leq \|(\nabla \eta_L) \varphi\|_{L^2} + \left| \|\eta_L(\nabla \varphi)\|_{L^2} - \|\nabla \varphi\|_{L^2} \right|
 \end{aligned}$$

Mit dominanter Konvergenz sieht man wieder sofort, dass  $\|\eta_L(\nabla \varphi)\|_{L^2} \rightarrow \|\nabla \varphi\|_{L^2}$ . Zu zeigen bleibt also  $\|(\nabla \eta_L) \varphi\|_{L^2} \rightarrow 0$ . Wir wenden die Hölder-Ungleichung mit den zueinander konjugierten Exponenten  $n/2$  und  $p_c/2$  an:

$$\begin{aligned}
 \|(\nabla \eta_L) \varphi\|_{L^2}^2 &= \int_{\widehat{M}} |\nabla \eta_L|^2 |\varphi|^2 \, d\text{vol}^{\hat{g}} \\
 &\leq \left( \int_{\widehat{M}} |\nabla \eta_L|^{2\frac{n}{2}} \, d\text{vol}^{\hat{g}} \right)^{2/n} \left( \int_{\text{supp } \nabla \varphi} |\varphi|^{2 \cdot (p_c/2)} \, d\text{vol}^{\hat{g}} \right)^{2/p_c} \\
 &= \|\nabla \eta_L\|_{L^n}^2 \cdot \|\varphi\|_{L^{p_c}(\text{supp } \nabla \varphi)}^2.
 \end{aligned}$$

Setze  $C := \sup v < \infty$ . Dann sehen wir, das

$$\|\nabla \eta_L\|_{L^n}^n \leq \int_{A_L^{2L}} \frac{2^n}{L^n} v \, d\text{vol}^{\hat{g}} \leq \frac{2^n C \omega_{n-1}}{L^n} \int_L^{2L} \varrho^{n-1} \, d\varrho \leq \frac{4^n C \omega_{n-1}}{n},$$

beschränkt ist. Ist  $\chi_L$  die charakteristische Funktion von  $A_L^{2L}$ , so konvergiert  $\chi_L$  punktweise gegen 0 und somit  $\chi_L \varphi$  punktweise gegen 0. Mit majorisierter Konvergenz folgt dann wieder  $\|\varphi\|_{L^{p_c}(\text{supp } \nabla \varphi)} = \|\chi_L \varphi\|_{L^{p_c}(\widehat{M}, \hat{g})} \rightarrow 0$ . Es folgt  $\|(\nabla \eta_L) \varphi\|_{L^2} \rightarrow 0$  und damit die Behauptung des Lemmas.  $\square$

## 5.3. Die ADM-Masse

### 5.3.1. Definition der ADM-Masse und Vermutung der positiven Masse

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Masse von asymptotisch euklidischen Mannigfaltigkeiten entlang der Ideen von Arnowitt, Deser und Misner (siehe [6] und andere). Der aktuelle Abschnitt ist für den logischen Aufbau unserer Lösung des Yamabe-Problems nicht erforderlich, sondern dient lediglich dazu, den Bezug zur ADM-Masse der allgemeinen Relativitätstheorie herzustellen.

Wir diskutieren diese ADM-Masse zunächst auf allgemeinen asymptotisch euklidischen Mannigfaltigkeiten von geeigneter Ordnung  $\mathcal{O}''(\varrho^{-\tau})$  bzw.  $\mathcal{O}'(\varrho^{-\tau})$  bzw.  $\mathcal{O}(\varrho^{-\tau})$ . Eine Hauptaussage ist der Satz von der positiven Masse. Diesen wollen wir allerdings in diesem Abschnitts nicht in dieser Allgemeinheit beweisen. Wir wollen uns aber dann recht bald auf eine Unterklasse von Mannigfaltigkeiten einschränken, die durch Umstülpung einer kompakten Mannigfaltigkeit entstehen. Diese Klasse zu betrachten ist ausreichend, um

damit das Yamabe-Problem zu lösen. In den danach folgenden Abschnitten diskutieren wir verschiedene Beweise des Satzes von der positiven Masse für durch Umstülpung erhaltene Mannigfaltigkeiten.

Weitergehende Informationen zu der Rolle der ADM-Masse in der allgemeinen Relativitätstheorie findet man in [42] oder in [44].

Wir bauen wiederum auf Definition 5.6 auf, der Definition asymptotisch euklidischer riemannschen Mannigfaltigkeiten. Sei  $(N, \hat{g})$  eine solche riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Karte  $\psi$  aus dieser Definition bezeichnen nun als  $y = (y^1, \dots, y^n)$ , da sie in der Anwendung aus einer Umstülpung entsteht. Außerdem  $\varrho = |y|: N \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 5.16.** Sei  $(N, \hat{g})$  eine asymptotisch euklidische riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . In asymptotischen Koordinaten setze

$$m := m(N, \hat{g}) := \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_R} \sum_{i,j=1}^n (\partial_i \hat{g}_{ij} - \partial_j \hat{g}_{ii}) \cdot \frac{y^j}{\varrho} \, \text{dvol}^{S_R} \right\} \quad (5.38)$$

falls der Grenzwert existiert. Hierbei bezeichnet  $S_R$  die Sphäre vom Radius  $R$  in den asymptotischen Koordinaten, wobei der Radius bezüglich der euklidischen Metrik zu nehmen ist, d. h.  $R^2 = \sum_{i=1}^n (y^i)^2$ . Das Volumenelement der Sphäre  $\text{dvol}^{S_R}$  ist auch bezüglich der euklidischen Metrik zu nehmen. Falls dieser Limes existiert, so heißt  $m$  die *ADM-Masse* von  $(N, \hat{g})$ .

Das Akronym ADM steht für die Physiker Arnowitt, Deser und Misner, die diese Masse eingeführt haben [6, 7, 8].

### Beispiel 5.17.

- (1) Auf  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  sind bezüglich der kartesischen Koordinaten die Koeffizienten  $g_{ij} = \delta_{ij}$  der Metrik konstant. Daher ist  $m(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) = 0$ .
- (2) Schwarzschildmetrik (kommt noch!)

**Bemerkung 5.18.** Im allgemeinen ist der Limes in (5.38) nicht unabhängig von der Wahl der asymptotisch euklidischen Koordinaten und folglich die ADM-Masse nicht invariant definiert. Es gilt aber folgender Satz, der in seiner ursprünglichen Form 1986 von Bartnik [16] bewiesen wurde. Wir präsentieren aber eine verbesserte Version, die wir in Chrusciels Notizen [23, Prop. 1.1.6] kennengelernt haben.

**Satz 5.19 (Bartnik [16], Chrusciel [23, Prop. 1.1.6]).** Sei  $(N, \hat{g})$  eine asymptotisch euklidische riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . In geeigneten Koordinaten außerhalb eines Kompaktums  $K \subset N$  gelte

$$(g - g_{\text{eukl}}) \in \mathcal{O}'(\varrho^{-\tau})$$

für ein  $\tau > \frac{n-2}{2}$ . Ferner sei  $\text{scal}^g \in L^1(N, \hat{g})$ . Dann existiert der Limes in (5.38), und die ADM-Masse  $m(N, \hat{g})$  hängt nicht von der Wahl der asymptotischen Koordinaten ab.

Die Existenz des Limes in (5.38), wie im ersten Teil des Satzes behauptet, folgt unmittelbar aus der folgenden Proposition, [23, Prop. 1.1.6]: Wir ersetzen hierbei ein geeignetes Kompaktum  $K$  in  $N$  durch einen Ball  $\bar{B}$  und erhalten somit eine Mannigfaltigkeit  $N'$ , so dass sich die asymptotisch euklidische Karte  $\psi: N \setminus K = N' \setminus B \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_R(0)$  zu einem Diffeomorphismus  $\psi: N' \rightarrow \mathbb{R}^n$  fortsetzt. Nun setzen wir die auf  $N \setminus K = N' \setminus B \cong \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_R(0)$  gegebene Metrik beliebig auf  $\mathbb{R}^n$  zu einer Metrik  $g'$  fort. Offensichtlich, existiert die ADM-Masse von  $(N, g)$  genau dann, wenn die ADM-Masse von  $(\mathbb{R}^n, g')$  existiert, und im Falle von Existenz stimmen die Werte der ADM Masse überein.

**Proposition 5.20 (Prop. 1.1.6 bei Chrusciel).** Auf  $\mathbb{R}^n$  schreiben wir eine riemannsche Metrik außerhalb eines gegebenen Kompaktums als  $g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{\text{eukl}} + \eta = g_{\text{eukl}} + \sum_{i,j=1}^n \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j$  und  $(g^{ij})_{i,j} := (g_{ij})_{i,j}^{-1} = (\delta_{ij} + \eta_{ij})_{i,j}^{-1}$ . Wir nehmen an, dass

- $\eta \rightarrow 0$  für  $\varrho = |y| \rightarrow \infty$ ,
- $\eta_{ij} \in L^\infty$  und  $g^{ij} \in L^\infty$ ,
- $\delta_k g_{ij} \in L^2$ ,
- $\text{scal}^g \in L^1$

Dann existiert der Limes in der Definition der ADM-Masse.

Die Bedingungen sind zum Beispiel erfüllt, wenn  $g$  asymptotisch euklidisch von Ordnung  $\mathcal{O}''(\varrho^{-\tau})$ ,  $\tau > (n-2)/2$  ist und  $\text{scal} \in L^1$ .

*Beweis von Proposition 5.20.* Wir haben in in Abschnitt A.1.4 des Anhangs gezeigt, siehe Formeln (A.3) und (A.4), dass

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}{}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \\ R_{ijk}{}^l &= \partial_i \Gamma_{jk}{}^l - \partial_j \Gamma_{ik}{}^l + \Gamma_{jk}{}^m \Gamma_{im}{}^l - \Gamma_{ik}{}^m \Gamma_{jm}{}^l. \end{aligned}$$

Deswegen erhalten wir

$$\text{scal}^g = g^{jk} R_{ijk}{}^i = \frac{1}{2} g^{jk} (\partial_i \Gamma_{jk}{}^i - \partial_j \Gamma_{ik}{}^i) + q,$$

wobei  $q$  ein quadratisches homogenes Polynom in  $\partial g$  ist, dessen Koeffizienten algebraische Ausdrücke in (den Koeffizienten von)  $g$  sind. Wir folgern daraus  $\Gamma_{ik}{}^i = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{i\ell} \partial_k g_{i\ell}$

und somit bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \text{scal}^g &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \frac{1}{2} g^{jk} g^{i\ell} (\partial_i \partial_j g_{k\ell} + \partial_i \partial_k g_{j\ell} - \partial_i \partial_\ell g_{kj} - \partial_j \partial_k g_{i\ell}) + q_0 \\
 &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n g^{jk} g^{i\ell} (\partial_i \partial_j g_{k\ell} - \partial_i \partial_\ell g_{kj}) + q_1 \\
 &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \partial_i \left( g^{jk} g^{i\ell} (\partial_j g_{k\ell} - \partial_\ell g_{kj}) \right) + q_2
 \end{aligned}$$

für geeignete quadratische Terme  $q_0$ ,  $q_1$  and  $q_2$  mit Eigenschaften analog zu obigem  $q$ . Im folgenden seien die Divergenzen und Integrale bezüglich der euklidischen Norm genommen.<sup>1</sup> Aus

$$\sum_{i,\ell=1}^n \partial_i (g^{i\ell} \alpha_\ell) = -\delta \alpha - \frac{1}{2} \sum_{i,\ell=1}^n \frac{\alpha_\ell g^{i\ell}}{\det(g)} \frac{\partial \det(g)}{\partial x^i},$$

siehe (1.16) erhalten wir

$$\text{scal}^g = \delta(d(\text{tr}_g \eta) + \delta \eta) + q_3.$$

Wir nutzen nun den Divergenzsatz für das Kreisringgebiet  $A_{R_1, R_2}$  zwischen den Radien  $R_1$  und  $R_2 > R_1$ .

$$\int_{A_{R_1, R_2}} \delta(d(\text{tr}_g \eta) + \delta \eta) = - \int_{S_{R_2}} (d(\text{tr}_g \eta) + \delta \eta)(\partial_r) + \int_{S_{R_1}} (d(\text{tr}_g \eta) + \delta \eta)(\partial_r).$$

Dieses Integral differiert vom Integral  $\int_{A_{R_1, R_2}} \text{scal}$  um das Integral  $\int_{A_{R_1, R_2}} q_3$ , und  $\partial g \in L^2$  impliziert, dass es eine Konstante  $C < \infty$  gibt, so dass für alle  $R_1 \in (R_1, \infty)$  gilt

$$\int_{A_{R_1, R_2}} |q_3| \leq C.$$

Daraus folgt für eine andere, von  $R_1$  unabhängige Konstante  $\tilde{C}$ :

$$\int_{A_{R_1, R_2}} |(\text{scal}^g - q_3)| < \tilde{C}.$$

Wir erhalten

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \sup_{R_2 > R_1} \int_{A_{R_1, R_2}} |\text{scal}^g - q_3| = 0,$$

und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.21.** Unter den Voraussetzungen von Satz 5.19 kann man auch ganz ähnlich zeigen, dass die ADM-Masse nicht von der Wahl der asymptotischen Koordinaten abhängt.

<sup>1</sup>Wir könnten auch die Divergenzen und Integrale bezüglich  $g$  nehmen, da sie sich von den verwendeten nur durch Terme niedrigerer Ordnung unterscheiden.

### 5.3.2. Positivität der ADM-Masse

Mehrere Arbeiten von Schoen und Yau [52, 53, 54] und von Witten [63] mit zusätzlichen Argumenten aus [47] ergeben den folgenden Satz. Im Fall  $n = 8$  sind noch weitere Argumente nötig.

**Satz 5.22 (Satz von der positive Masse (Klassische Version)).** *Sei  $(N, \hat{g})$  eine zusammenhängende, asymptotisch euklidische Mannigfaltigkeit und sei  $\varrho$  die Radius-Funktion in asymptotischen Koordinaten, die außerhalb eines Kompaktums  $K \subset N$  definiert sind. Ferner gelte  $\text{scal} \geq 0$ . Auf  $N \setminus K$  gelte:*

$$\hat{g} - g_{\text{eukl}} \in \mathcal{O}'(\varrho^{-\tau})$$

*für ein  $\tau > \frac{n-2}{2}$  und ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Außerdem*

- *sei  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit,*
- *oder es gelte  $n \leq 8$ ,*
- *oder  $(N, \hat{g})$  sei (überall) konform flach.*

*Dann ist  $m(N, \hat{g}) \geq 0$  und  $m(N, \hat{g}) = 0$  genau dann, wenn  $(N, \hat{g})$  isometrisch zu  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}})$  ist.*

Der Satz wurde zunächst von Schoen und Yau für  $n = 3$  bewiesen [52] und es wurde erwartet, dass der Beweis ohne Schwierigkeiten auf beliebige Dimensionen ausgedehnt werden kann. Da die von Schoen und Yau verwendeten minimalen Hyperflächen in hohen Dimensionen schwer zu kontrollierende Singularitäten besitzen, war diese Verallgemeinerung jedoch nur für  $n \leq 7$  problemlos möglich, mit etwas mehr Aufwand auch für  $n = 8$ . Um eine Lösung des Yamabe-Problems in allen Fällen zu zeigen, entwickelten Schoen und Yau eine alternative Beweistechnik für Umstülpungen konform flacher Mannigfaltigkeiten [54]. Witten [63] entwickelte einen weiteren Beweis, der den Satz für beliebige  $n \geq 3$  ergibt, aber der dafür die zusätzliche Bedingung benötigt, dass  $N$  eine Spin-Mannigfaltigkeit ist. Diese Methode wurde von Parker und Taubes [47] weiter ausgearbeitet und wurde dann von Ammann und Humbert [5] für Umstülpungen kompakter Spin-Mannigfaltigkeiten etwas vereinfacht.

Wir werden obigen Satz nicht in seiner vollen Allgemeinheit zeigen, sondern nur in diesen Spezialfällen.

**Bemerkung 5.23.** Die meisten Spezialisten gehen davon aus, dass die Folgerung des Satzes auch dann noch richtig ist, wenn keine der Voraussetzungen nach dem Wort „Außerdem“ gilt. Diesem Thema sind viele aktuelle Arbeiten von starken Mathematikern gewidmet, zum Beispiel [56] und [45] und einige darauf folgende Artikel.

### 5.3.3. Die ADM-Masse und der konstante Term der Green-Funktion

**Lemma 5.24.** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $\lambda(M, [g]) > 0$ , und sei  $x_0 \in M$ . Wir nehmen an, dass wir im Fall  $n \in \{3, 4, 5\}$  sind oder dass  $(M, g)$  konform flach nahe  $x_0$  ist. Sei  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  die Umstülpung von  $(M, g)$  an der Stelle  $x_0$ . Wir schreiben in umgestülpten konformen Normalkoordinaten (wie in Proposition 5.9):*

$$\begin{aligned} \widehat{g} &= \gamma^{p_c-2} \cdot (g_{\text{eukl}} + \mathcal{O}''(\varrho^{-2})), \text{ falls } n \leq 5, \\ \text{bzw. } \widehat{g} &= \gamma^{p_c-2} \cdot g_{\text{eukl}}, \text{ falls } M \text{ konform flach um } x_0, \\ \text{und } \gamma &= 1 + A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}), \quad (\varrho \nearrow \infty). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$m(\widehat{g}) = 2 \cdot A. \quad (5.39)$$

*Beweisskizze.*

(a) Nach (5.10) ist  $\text{scal}^{\widehat{g}} = 0$ , also insbesondere  $\text{scal}^{\widehat{g}} \in L^1(\widehat{M})$ . Ferner ist

$$\begin{aligned} g - g_{\text{eukl}} &= (1 + (p_c - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n})) \cdot (g_{\text{eukl}} + \mathcal{O}''(\varrho^{-2})) - g_{\text{eukl}} \\ &= (p_c - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot g_{\text{eukl}} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}) + \mathcal{O}''(\varrho^{-2}), \text{ falls } n \leq 5 \end{aligned}$$

bzw.

$$g - g_{\text{eukl}} = (p_c - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot g_{\text{eukl}} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n}), \text{ falls } (M, g) \text{ konform flach,}$$

also insbesondere

$$g - g_{\text{eukl}} = \mathcal{O}''(\varrho^{-\tau}),$$

wobei

$$\tau = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 3 \\ 2, & \text{falls } n = 4, 5 \\ n - 2, & \text{falls } (M, g) \text{ konform flach.} \end{cases}$$

In jedem Fall ist  $\tau > \frac{n-2}{2}$ . Damit ist  $(g - g_{\text{eukl}}) \in \mathcal{C}_{-\tau}^2(N - K)$ , also insbesondere  $(g - g_{\text{eukl}}) \in \mathcal{C}_{-\tau}^{1,\alpha}(N - K)$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Nach dem Satz von Bartnik 5.19 ist also die ADM-Masse  $m(\widehat{g})$  der Umstülpung wohldefiniert.

(b) Im konform flachen Fall berechnen wir weiter:

$$g_{ij} - \delta_{ij} = (p_c - 2) \cdot A \cdot \varrho^{2-n} \cdot \delta_{ij} + \mathcal{O}''(\varrho^{1-n})$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \partial_j g_{kl} = (p_c - 2) \cdot A \cdot \frac{2-n}{2} \cdot \varrho^{-n} \cdot 2 y^j \cdot \delta_{kl} + \mathcal{O}(\varrho^{-n}) \\
&\quad = -4 \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot y^j \cdot \delta_{kl} + \mathcal{O}(\varrho^{-n}) \\
\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) &= -4 \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot (y^j - n y^j) + \mathcal{O}(\varrho^{-n}) \\
&= 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot y^j + \mathcal{O}(\varrho^{-n})
\end{aligned}$$

Mit dem äußeren Normalenfeld

$$\begin{aligned}
\nu &= \partial_\varrho \\
&= \frac{\varrho \cdot \partial_\varrho}{\varrho} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n y^j \cdot \partial_j}{\varrho}
\end{aligned}$$

erhalten wir für den Integranden in (5.38)

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \cdot \partial_j, \nu \right\rangle &= \sum_{j=1}^n 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot \varrho^{-n} \cdot y^j \cdot y^j \cdot \varrho^{-1} + \mathcal{O}(\varrho^{-n}) \\
&= 4 \cdot (n-1) \cdot A \cdot \varrho^{1-n} + \mathcal{O}(\varrho^{-n}).
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \cdot \int_{S_R} \left\langle \sum_{i,j=1}^n (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \cdot \partial_j, \nu \right\rangle \mathrm{dvol}^{S_R} \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}} \cdot 2 \cdot A \cdot R^{1-n} \cdot R^{n-1} \cdot \omega_{n-1} + \mathcal{O}(R^{-1}) \\
&= 2 \cdot A + \mathcal{O}(R^{-1}).
\end{aligned}$$

- (c) Der Fall  $n \in \{3, 4, 5\}$ : Eine ähnliche Rechnung kann man in diesem Fall durchführen, die wir hier nicht wiedergeben wollen.  $\square$

### Bemerkungen 5.25.

- (1) Angenommen  $(M, g)$  erfüllt die Voraussetzungen von Proposition 5.3. Sei zusätzlich  $M$  zusammenhängend und  $x_0 \in M$ . Wir haben dann eine Entwicklung nahe  $x_0$  wie in (5.4).

Wir sagen dann  $(M, g, x_0)$  erfüllt die *kompatte der Version der Satzes von der positiven Masse*, falls gilt:

$$A \geq 0 \text{ und } (A = 0 \text{ gilt nur, wenn } (M, g)$$



konform äquivalent zur runden Sphäre ist).

Den zuvor genannten Satz von der positiven Masse nennt man dann oft auch die nicht-kompakte Version, um ihn von der obigen, kompakten Version zu unterscheiden.

- (2) Der Satz von der positiven Masse impliziert also – unter der Annahme, dass alle obigen Voraussetzungen erfüllt sind – auch die kompakte Version des Satzes von der positiven Masse.
- (3) Umgekehrt hat Lohkamp gezeigt ([], siehe auch [51, Seite 16 Theorem 2.8], dass jedes Gegenbeispiel gegen die kompakte Version des Satzes von der positiven Masse (mit negativer ADM-Masse) auch ein Gegenbeispiel gegen die nicht-kompakte Version ist. Der Satz von der positiven Masse (ohne Gleichheitsdiskussion) ist also in der kompakten Version äquivalent zu seiner nicht-kompakten Version.

## 5.4. Der Satz von der positiven Masse für Spin-Mannigfaltigkeiten

Im diesem Abschnitt wollen wir den Satz von der positiven Masse für geschlossene Mannigfaltigkeiten  $M$  zeigen, falls eine endliche Überlagerung von  $M$  spin ist. Wir kürzen den Satz von der positiven Masse im folgenden manchmal auch mit PMT ab, was für das Positive-Masse-Theorem steht. Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in die Spin-Geometrie.

### 5.4.1. Einführung in die Spin-Geometrie

Auf  $\mathbb{R}^n$  sind *Spinoren* vektorwertige Funktionen  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$ . Der *Dirac-Operator* auf  $\mathbb{R}^n$  ist definiert durch

$$\not{D}\psi := \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \partial_i \psi.$$

Hierbei sind  $\gamma_i \in \text{Mat}(2^{[n/2]}; \mathbb{C})$  mit  $\gamma_i \cdot \gamma_j + \gamma_j \cdot \gamma_i = -2\delta_{ij} \cdot 1$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \not{D}^2 \psi &= \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \partial_i (\gamma_j \partial_j \psi) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \gamma_i \gamma_j \partial_{i,j}^2 \psi \\ &= \sum_{i < j} \underbrace{(\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i)}_{=-2\delta_{ij}=0} \partial_{ij}^2 \psi + \sum_{i=1}^n \underbrace{\gamma_i \gamma_i}_{=-1} \partial_{ii}^2 \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 \psi \\
&= \Delta \psi.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Im Fall  $n = 3$  ist z.B.

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Eine Mannigfaltigkeit ist eine Spin-Mannigfaltigkeit, wenn sie orientierbar ist und die zweite Stiefel-Whitney-Klasse des Tangentialbündels  $w_2(TM)$  verschwindet, siehe [25, Kap. 2] [41, II §1 und §2], [19, Abschnitt 2.1].

Ist  $(M, g)$  eine riemannsche *Spin-Mannigfaltigkeit*, so kann man ein komplexes Vektorbündel vom Rang  $2^{[n/2]}$  mit hermiteschen Zusammenhang  $\nabla$ , das *Spinorbündel*  $\Sigma M$ , definieren sowie den *Dirac-Operator*  $\not{D}$ , der dann auf *Spinoren*, d. h. Schnitten in  $\Sigma M$ , wirkt. Als Verallgemeinerung von (5.40) gilt dann die *Lichnerowicz-Schrödinger-Formel*

$$\not{D}^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\text{scal}}{4}, \tag{5.41}$$

siehe zum Beispiel [41, II Theorem 8.17].

#### 5.4.2. Analysis von Dirac-Operatoren und Green-Funktion von $\not{D}$

Der Beweis des Satzes geht im wesentlichen auf den bereits oben erwähnten Beweis von Witten [63] und den Ausführungen von Parker und Taubes [47] zurück. Diese Arbeiten erfordern analytische Hilfsmittel auf asymptotisch euklidischen Mannigfaltigkeiten, insbesondere Invertierbarkeitsaussagen für uniform elliptische Differentialoperatoren in geeigneten gewichteten Sobolev-Räumen. Passende Referenzen für die Grundlagen zu finden, ist nicht einfach.

Wir präsentieren eine vereinfachte Version von Ammann und Humbert, die in [5] publiziert wurde. Diese Version benutzt nur analytische Hilfsmittel auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Die Grundlagen hierfür sind in vielen Lehrbüchern zu finden, zum Beispiel in [48], [41].

Wir fassen zunächst einige Ergebnisse der Spektraltheorie von Dirac-Operatoren auf kompakten riemannschen Mannigfaltigkeiten zusammen. Wir notieren wieder  $H^k(M; \Sigma M) := H^{k,2}(M; \Sigma M)$ . Der Dirac-Operator  $\not{D}: \mathcal{C}^\infty(M; \Sigma M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M; \Sigma M)$  besitzt eine eindeutige stetige Erweiterung  $\not{D}: H^1(M; \Sigma M) \rightarrow L^2(M; \Sigma M)$ . Diese Erweiterung ist selbst-adjungiert als in  $L^2(M; \Sigma M)$  dicht definierter, unbeschränkter Operator. Das Spektrum  $\text{spec}(\not{D})$  von  $\not{D}$  ist eine diskrete Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , die sich nirgendwo in  $\mathbb{R}$ , aber sowohl in  $+\infty$  als auch in  $-\infty$  häuft. Für  $\lambda \in \text{spec}(\not{D})$  ist der Kern von  $\not{D} - \lambda$  eine nicht-triviale, endlich-dimensionaler Vektorraum, der aus glatten Schnitten von  $\Sigma M$  besteht. Aus der Definition des Spektrums hingegen folgt unmittelbar für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{spec}(\not{D})$ , dass  $\not{D} - \lambda$  ein Isomorphismus (d. h. ein linearer Homöomorphismus) von  $H^1(M; \Sigma M)$  nach  $L^2(M; \Sigma M)$  ist.

Die Definition des Spinorbündels und des Dirac-Operators hängt von der riemannschen Metrik  $g$  ab. Wir schreiben deswegen manchmal  $\mathcal{D}^g$ , um die Abhängigkeit von der Metrik auszudrücken. Aus Proposition 5.28 erhalten wir

$$\dim \ker \mathcal{D}^g = \dim \ker \mathcal{D}^{\tilde{g}}.$$

**Lemma 5.26.** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  mit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Dann ist 0 nicht im Spektrum  $\text{spec}(\mathcal{D}^g)$ .*

*Beweis.*

Wegen  $\lambda(M, [g]) > 0$  können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\text{scal}^g > 0$  (sonst ersetze  $g$  durch eine dazu konforme Metrik, siehe Lemma 3.17. Angenommen  $\psi \in \ker \mathcal{D}^g$ . Dann erhalten wir unter Nutzung der Lichnerowicz-Schrödinger-Formel (5.41) den folgenden Widerspruch

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M |\mathcal{D}^g \psi|^2 \, \text{dvol}^g = \int_M \langle \psi, (\mathcal{D}^g)^2 \psi \rangle \, \text{dvol}^g \\ &= \int_M \langle \psi, \nabla^* \nabla \psi \rangle \, \text{dvol}^g + \int_M \frac{\text{scal}^g}{4} \langle \psi, \psi \rangle \, \text{dvol}^g \\ &\geq \int_M |\nabla \psi|^2 \, \text{dvol}^g + \frac{\min \text{scal}^g}{4} \|\psi\|_{L^2}^2 > 0. \end{aligned}$$

□

Aus der Spektraltheorie folgt nun, dass der Operator  $\mathcal{D} : H^{1,2}(M; \Sigma M) \rightarrow L^2(M; \Sigma M)$  ein stetiges Inverses besitzt. Mit Methoden analog zu Abschnitt 1.11 sieht man, dass der Dirac-Operator für alle  $k \in \mathbb{Z}$  einen Isomorphismen

$$\mathcal{D} : H^k(M; \Sigma M) \rightarrow H^{k+1}(M; \Sigma M)$$

definiert.

Zu gegebenem  $x_0 \in M$  und ein  $\Phi \in \Sigma_{x_0} M$  überprüft man nun analog zu Übung 1.11, dass  $\delta_{x_0} \Phi \in H^{-k}(M; \Sigma M)$  für alle  $k > \frac{n}{2}$ . Es gibt also eine eindeutige distributionelle (also schwache) Lösung  $\Gamma_\Phi$  der Gleichung

$$\mathcal{D}^g \Gamma_\Phi = -\omega_{n-1} \delta_{x_0} \Phi. \quad (5.42)$$

Derartige Lösungen nennen wir eine *Green-Funktion des Dirac-Operators*. Auf Grund von elliptischer Regularität ist  $\Gamma_\Phi$  glatt auf  $M \setminus \{x_0\}$  und in  $L^1(M; \Sigma M)$ .

### 5.4.3. Identifikation von Spinoren bezüglich verschiedener Metriken

In diesem Unterabschnitt nehmen wir an, dass auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  zwei Riemannsche Metriken  $g$  und  $h$  gegeben sind. Wir wollen Spinoren bezüglich  $g$  mit Spinoren bezüglich  $h$  identifizieren. Wir folgen hierbei [BG92].

Wir bestimmen ein  $S \in \text{End}(TM)$ , so dass

$$h(X, Y) = g(S(X), Y) \quad \forall X, Y \in T_x M \quad \forall x \in M.$$

Der Endomorphismenschnitt  $S \in \Gamma(\text{End}(TM))$  ist  $g$ -symmetrisch und  $g$ -positiv definit und besitzt deswegen einen eindeutigen Endomorphismenschnitt  $B \in \Gamma(\text{End}(TM))$ , der  $B^2 = S$  erfüllt und  $g$ -symmetrisch und  $g$ -positiv definit positiv ist. Ist  $M$  zusätzlich orientiert, so ist

$$B_* : ((e_1, \dots, e_n)) := (Be_1, \dots, Be_n)$$

eine Abbildung, die positiv orientierte  $\tilde{g}$ -Orthonormalbasen auf positiv orientierte  $g$ -Orthonormalbasen abbildet. Da diese Abbildung mit der Operation von  $\text{SO}(n)$  durch Basis-Transformation kommutiert, erhalten wir einen Isomorphismus von  $\text{SO}(n)$  Hauptfaserbündeln

$$B_* : P_{\text{SO}}(M, h) \rightarrow P_{\text{SO}}(M, g).$$

Eine Spin-Struktur auf der orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  besteht aus einem  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündel  $P_{\text{Spin}}(M, g)$  zusammen mit einer  $\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$  äquivarianten Abbildung  $\vartheta_g : P_{\text{Spin}}(M, g) \rightarrow P_{\text{SO}}(M, g)$ . Wir erhalten hieraus eine Spin-Struktur auf  $(M, h)$ , indem wir die doppelte Überlagerung  $\vartheta_g : P_{\text{Spin}}(M, g) \rightarrow P_{\text{SO}}(M, g)$  entlang von  $B_\#$  zu einer doppelten Überlagerung  $\vartheta_h : P_{\text{Spin}}(M, h) \rightarrow P_{\text{SO}}(M, h)$  zurückziehen. Dies definiert nun eine Spin-Struktur auf  $(M, h)$ , und wir erhalten einen Lift  $B_\# : P_{\text{Spin}}(M, h) \rightarrow P_{\text{Spin}}(M, g)$  von  $B_*$ .

Die Spinor-Bündel zu diesen Metriken erhalten wir als assoziierte Bündel:

$$\Sigma(M, g) := P_{\text{Spin}}(M, g) \times_{\sigma_n} \Sigma_n, \quad \Sigma(M, h) := P_{\text{Spin}}(M, h) \times_{\sigma_n} \Sigma_n.$$

Deswegen ist  $\beta_g^h := B_\# \times_{\sigma_n} \text{id}_{\Sigma_n}$  ein faserweiser isometrischer Vektorbündelisomorphismus

$$\beta_g^h : \Sigma(M, h) \rightarrow \Sigma(M, g).$$

Offensichtlich ist  $\beta_h^g$  die zu  $\beta_g^h$  inverse Abbildung.

**Bemerkung 5.27.** Man beachte, dass diese Zuordnung im folgenden Sinn nicht funktoriell ist: Angenommen  $k$  ist eine weitere Metrik, dann sind im allgemeinen die Abbildungen  $\beta_k^h$  und  $\beta_k^g \circ \beta_g^h$  verschieden.

Im folgenden werden wir diese Identifikation in zwei Situationen nutzen.

Zunächst im Spezialfall der konformen Äquivalenz (Proposition 5.28) und dann im folgenden Unterabschnitt, um eine effiziente Trivialisierung des Spinor-Bündels in Normalkoordinaten zu erreichen.

Wir nennen einen Spinor  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, g))$  *harmonisch*, falls  $\mathcal{D}^g \varphi = 0$ .

**Proposition 5.28 (Konforme Kovarianz des Dirac-Operators).** *Es gelte  $h = f^2 g$  für eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow (0, \infty)$ . Dann gilt für alle  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, h))$ :*

$$\mathcal{D}^h \varphi = f^{-(n+1)/2} \beta_h^g \left( \mathcal{D}^g (f^{(n-1)/2} \beta_g^h(\varphi)) \right). \quad (5.43)$$

*Inbesondere erhalten wir aus (5.43) für  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, h))$ :*

$\varphi$  ist ein harmonischer Spinor auf  $(M, h)$  genau dann, wenn  $f^{(n-1)/2} \beta_g^h(\varphi)$  ein harmonische Spinor auf  $(M, g)$  ist.

Man erhält einen Beweis durch sorgfältiges Nachrechnen. Dies ist in [34] detailliert und gut ausgearbeitet und soll hier nicht wiedergegeben werden. Die Formel war zuvor aber schon lange bekannt, siehe zum Beispiel [35, 33].

#### 5.4.4. Effiziente Trivialisierung des Spinorbündels in Normalkoordinaten

Wir betrachten nun Normalkoordinaten bezüglich der Metrik  $g$  (kurz:  $g$ -Normalkoordinaten) im Entwicklungspunkt  $x_0$ . Wir identifizieren hierzu eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit einem Ball  $B_R(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  mit Hilfe der Exponentialabbildung und einer Isometrie  $T_{x_0} M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Auf der Umgebung  $U$  ist dann also sowohl die euklidische Metrik  $g_{\text{eukl}}$  als auch die ursprüngliche Riemannsche Metrik  $g$  gegeben und es gilt  $g = g_{\text{eukl}} + \mathcal{O}''(r^2)$  für  $r \rightarrow 0$ . Ist  $g$  flach auf einer Umgebung von  $x_0$ , so gilt sogar  $g = g_{\text{eukl}}$ . Die Abbildung  $\beta_g^{g_{\text{eukl}}}$  aus dem vorigen Unterabschnitt erlaubt uns nun das Spinor-Bündel  $\Sigma(U, g)$  mit dem euklidischen Spinorbündel  $\Sigma(B_R(0), g_{\text{eukl}})$  zu identifizieren, d.h. zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir  $\varphi \in \Sigma(U, g)$  mit  $\beta_g^{g_{\text{eukl}}}(\varphi) \in \Sigma(B_R(0), g_{\text{eukl}})$ . Eine derartige Identifikation ist natürlich dasselbe wie eine Trivialisierung von  $\Sigma(U, g)$ .

Wir betrachten nun die Levi-Civita-Zusammenhänge  $\nabla^g$  und  $\nabla^{g_{\text{eukl}}}$  bezüglich dieser Metriken. Sei  $(\partial_1, \dots, \partial_n)$  die euklidische Standard-Basis von  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $(e_1, \dots, e_n)$  mit  $e_j := \beta_g^{g_{\text{eukl}}}(\partial_j)$  ein orthonormaler Rahmen für  $g$ . Es gilt für die euklidische Clifford-Multiplikation  $\cdot$ , siehe [41, Theorem 4.14] oder [11, I Lemma 4.1]

$$\nabla_X^g \varphi = \nabla_X^{g_{\text{eukl}}} \varphi + \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^n \omega_j^k(X) \partial_j \cdot \partial_k \cdot \varphi, \quad (5.44)$$

wobei  $\omega_j^k(X) = g(\nabla_X^g e_j, e_k)$ , oder äquivalent ausgedrückt  $\sum_{k=1}^n \omega_j^k(X) e_k = \nabla_X^g e_j$ .

Man beachte hierbei, dass  $g$ -Clifford-Multiplikation mit  $e_j$  mit der  $g_{\text{eukl}}$ -Clifford-Multiplikation mit  $\partial_j$  übereinstimmt.

Nun wollen wir die Dirac-Operatoren  $\not{D}^g$  und  $\not{D}^{g_{\text{eukl}}}$  vergleichen, wobei wir hier ähnlich zu [4] vorgehen wollen.

**Lemma 5.29.** *Sei  $U$  eine Umgebung von  $x_0$ . In  $g$ -Normalkoordinaten und bezüglich der durch  $\beta_g^{g_{\text{eukl}}}$  gegebenen Trivialisierung des Spinorbündels gilt für jeden auf  $U$  oder  $U \setminus \{x_0\}$  definierten glatten Schnitt  $\varphi$  des Spinorbündels*

$$\not{D}^g \varphi = \not{D}^{g_{\text{eukl}}} \varphi - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^n x^\alpha \text{Ric}^g(e_\alpha)|_0 \cdot \varphi + \mathcal{O}'(r^2)(\varphi) + \mathcal{O}'(r^2)(\nabla \varphi).$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{O}'(r^2)(\varphi)$  einen Term der Form  $A(\varphi)$  für Schnitt  $A \in \Gamma(\text{End}(\Sigma_n))$  mit  $A$  in  $\mathcal{O}'(r^2)$ . Analog bezeichnet  $\mathcal{O}'(r^2)(\nabla\varphi)$  einen Term der Form  $\tilde{A}(\nabla\varphi)$  für einen Schnitt  $\tilde{A} \in \Gamma(\text{Hom}(T^*\mathbb{R}^n \otimes \Sigma\mathbb{R}^n, \Sigma\mathbb{R}^n))$  mit  $\tilde{A}$  in  $\mathcal{O}'(r^2)$ .

Das Lemma gilt auch dann, wenn wir  $e_j$  durch  $\partial_j$  ersetzen oder die euklidische Clifford-Multiplikation durch die bezüglich  $g$  oder beide Ersetzungen gleichzeitig, denn alle diese Varianten unterscheiden sich nur um Terme in  $\mathcal{O}'(r^2)$ , was in obiger Formel einen Term der Form  $\mathcal{O}'(r^3)(\varphi)$  ergibt.

**Bemerkung 5.30.** In großen Teilen der spin-geometrischen Literatur (zum Beispiel zur Getzler-Reskalierung im Wärmekernbeweis des Atiyah-Singer-Index-Satzes) werden ähnliche Entwicklungen mit Hilfe einer anderen Trivialisierung des Spinor-Bündels durchgeführt: man erhält diese durch Paralleltransport in radiale Richtung im Spinorbündel. In dieser Trivialisierung bleibt Lemma 5.29 weiterhin gültig.

Die von uns gewählte Trivialisierung  $\beta_g^{\text{eukl}}$  hat den Vorteil, dass in höheren Ordnungen (siehe Zusatz 5.31) weniger Fehlerterme auftreten.

*Beweis von Lemma 5.29.* Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\varphi$  auf  $U$  definiert und glatt ist und nicht in  $x_0$  verschwindet. Für ein festes  $\varphi$  ist dann  $\mathcal{O}'(r^2)(|\varphi| + |\nabla\varphi|)$  gleichbedeutend mit  $\mathcal{O}'(r^2)$ .

Wir benutzen zunächst (4.14) und die dort verwendete Notation für die Berechnung der Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ij}^k$ , die durch  $\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k = \nabla_{\partial_i}^g \partial_j$  definiert sind. Wir betrachten  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $g^{ab}$  und  $\partial_a g_{bc}$  an der Stelle  $x = (x^1, \dots, x^n)$ .

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{\ell, \alpha=1}^n g^{k\ell} \left( -R_{ji\alpha\ell}(0) - R_{j\alpha i\ell}(0) - R_{ij\alpha\ell}(0) - R_{i\alpha j\ell}(0) \right. \\ &\quad \left. + R_{i\ell\alpha j}(0) + R_{i\alpha\ell j}(0) \right) x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\ell, \alpha=1}^n (\delta^{k\ell} + \mathcal{O}'(r^2)) \left( R_{\alpha j i \ell}(0) + R_{\alpha i j \ell}(0) \right) x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^n \left( R_{\alpha j i k}(0) + R_{\alpha i j k}(0) \right) x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2) \end{aligned}$$

Wir schreiben  $B = (b_k^\ell)_{\ell, k=1, \dots, n}$  und haben dann  $e_k = \sum_{\ell=1}^n b_k^\ell \partial_\ell$ . Man rechnet nach, dass

$$\sum_{\ell, m=1}^n b_k^\ell g_{\ell m} b_s^m = g(e_k, e_s) = \delta_{ks},$$

das heißt

$$B = \left( (g_{ij})_{ij} \right)^{-1/2} = \left( \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta=1}^n R_{i\alpha\beta j}(0) x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}''(r^3) \right)_{ij}^{-1/2}$$

$$= I_n + \frac{1}{6} \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^n R_{i\alpha\beta j}(0) x^\alpha x^\beta \right)_{ij} + \mathcal{O}''(r^3).$$

Hierbei verwendeten wir die Entwicklung

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta=1}^n R_{i\alpha\beta j}(0) x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}''(r^3)$$

siehe (4.14). Wir erhalten auch:

$$\partial_i b_j^k = -\frac{1}{2} \partial_i g_{jk} + \mathcal{O}'(r^2) = \frac{1}{6} \sum_{\alpha=1}^n (R_{ji\alpha k}(0) + R_{j\alpha i k}(0)) x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2).$$

Aus (5.44) erhalten wir das folgende, wobei  $\cdot$  wieder die euklidische Clifford-Multiplikation bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^g \varphi &= \sum_{i=1}^n \partial_i \cdot \nabla_{e_i}^g \varphi \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i \cdot \nabla_{\partial_i}^{g_{\text{eukl}}} \varphi}_{\mathcal{D}^{g_{\text{eukl}}} \varphi} + \sum_{i=1}^n \partial_i \cdot \nabla_{e_i - \partial_i}^{g_{\text{eukl}}} \varphi + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^n \omega_j^k(e_i) \partial_i \cdot \partial_j \cdot \partial_k \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Der zweite Summand ergibt

$$\sum_{i,\ell=1}^n (b_i^\ell - \delta_i^\ell) \partial_i \cdot \nabla_{\partial_\ell}^{g_{\text{eukl}}} \varphi = \frac{1}{6} \sum_{i,\ell,\alpha,\beta=1}^n R_{i\alpha\beta\ell}(0) x^\alpha x^\beta \partial_i \cdot \nabla_{\partial_\ell}^{g_{\text{eukl}}} \varphi + \mathcal{O}'(r^3) = \mathcal{O}'(r^2).$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega_j^k(e_i) \partial_k &= \sum_{k=1}^n \omega_j^k(\partial_i) e_k + \mathcal{O}'(r^2) \\ &= \nabla_{\partial_i}^g e_j + \mathcal{O}'(r^2) \\ &= \nabla_{\partial_i}^g \left( \sum_{\ell=1}^n b_j^\ell \partial_\ell \right) + \mathcal{O}'(r^2) \\ &= \sum_{\ell=1}^n (\partial_i b_j^\ell) \partial_\ell + \sum_{\ell,k=1}^n b_j^\ell \Gamma_{i\ell}^k \partial_k + \mathcal{O}'(r^2) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \partial_i b_j^k + \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k + \mathcal{O}'(r^2). \end{aligned}$$

$$\partial_i b_j^k + \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{6} \sum_{\alpha=1}^n (R_{ji\alpha k}(0) + R_{j\alpha i k}(0) + 2R_{\alpha j i k}(0) + 2R_{\alpha i j k}(0)) x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \sum_{\alpha=1}^n \underbrace{(R_{\alpha k j i}(0) + R_{\alpha j i k}(0) + R_{\alpha i k j}(0) + 3R_{\alpha i j k}(0))}_{=0 \text{ wegen 1. Bianchi-Ident.}} x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n R_{\alpha i j k}(0) x^\alpha + \mathcal{O}'(r^2)
\end{aligned}$$

Der dritte Summand in (5.45) ist dann gleich

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,\alpha=1}^n \partial_i \cdot \partial_j \cdot \left( \frac{1}{2} R_{\alpha i j k}(0) x^\alpha \partial_k \right) \cdot \varphi + \mathcal{O}'(r^2) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,\alpha=1}^n x^\alpha R_{\alpha i j k}(0) \partial_i \cdot \partial_j \cdot \partial_k \cdot \varphi + \mathcal{O}'(r^2)
\end{aligned}$$

Die Terme mit  $i \neq j \neq k \neq i$  verschwinden wegen der 1. Bianchi-Identität und wegen  $\partial_i \cdot \partial_j \cdot \partial_k = \partial_j \cdot \partial_k \cdot \partial_i = \partial_k \cdot \partial_i \cdot \partial_j$ . Terme mit  $j = k$  verschwinden aufgrund von  $R_{\alpha i j k}(0) = -R_{\alpha i k j}(0)$ . Mit  $\partial_i \cdot \partial_i = -1$  bekommen wir für den dritten Summand

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{8} \sum_{i,k,\alpha=1}^n x^\alpha R_{\alpha i i k}(0) \partial_k \cdot \varphi + \frac{1}{8} \sum_{i,j,\alpha=1}^n x^\alpha R_{\alpha i j i}(0) \partial_j \cdot \varphi + \mathcal{O}'(r^2) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{k,\alpha=1}^n x^\alpha \text{ric}_{\alpha k}(0) \partial_k \cdot \varphi + \mathcal{O}'(r^2) \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^n x^\alpha \text{Ric}(e_\alpha)|_0 \cdot \varphi + \mathcal{O}'(r^2).
\end{aligned}$$

Das Lemma ist somit gezeigt, falls  $\varphi$  auf  $U$  definiert und glatt ist und nicht in  $x_0$  verschwindet.

Der allgemeine Fall folgt nun, indem wir auf  $U$  definierte Schnitte  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq N := 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$  von  $\Sigma M$  wählen, so dass  $(\psi_1(x), \dots, \psi_N(x))$  für jedes  $x \in U$  eine Orthornormalbasis von  $\Sigma_x M$  ist. Wir schreiben dann einen auf  $U \setminus \{x_0\}$  definierten Schnitt  $\varphi$  als  $\varphi = \sum_{i=1}^N f_i \psi_i$  mit  $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U \setminus \{x_0\})$  und erhalten dann die Aussage des Lemmas durch einfache Rechnung aus dem obigen Spezialfall.  $\square$

Wir können in dieser Argumentation auch noch den Term dritter Ordnung von (4.14) hinzunehmen und erhalten hieraus den nächsten Term in der Asymptotik. Dies wollen wir im folgenden Zusatz ausdrücken. Details sind im wesentlichen in der Referenz [4, Abschnitt 4.1] zu finden, sind zudem Terme höherer Ordnung in  $r$  zu finden.

**Zusatz 5.31.** *Es gelten die Voraussetzungen des obigen Lemmas. Dann gibt es trilineare Abbildung  $T^g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$  und  $B^g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times T^* \mathbb{R}^n \otimes \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ , so dass*

$$\mathcal{D}^g \varphi = \mathcal{D}^{g_{\text{eukl}}} \varphi - \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^n x^\alpha \text{Ric}^g(e_\alpha)|_0 \cdot \varphi$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha, \beta=1}^n x^\alpha x^\beta (T^g(e_\alpha, e_\beta, \varphi)) \\
& + \frac{1}{6} \sum_{i, \ell, \alpha, \beta=1}^n R_{i\alpha\beta\ell}(0) x^\alpha x^\beta \partial_i \cdot \nabla_{\partial_\ell}^{g_{\text{eukl}}} \varphi \\
& + \mathcal{O}'(r^3)(\varphi) + \mathcal{O}'(r^3)(\nabla^{g_{\text{eukl}}} \varphi).
\end{aligned}$$

Man kann auch leicht zeigen, dass  $T^g$  nur von  $\nabla R^g|_0$  abhängt, und zwar linear. Wir werden aber lediglich die Existenz von  $T^g$  nutzen.

#### 5.4.5. Asymptotik der Green-Funktion von $\not{D}$

Wir nehmen wir an, dass  $(M, g)$  eine geschlossene Spin-Mannigfaltigkeit mit positiver Yamabe-Konstante ist, und wir definieren wiederum die Green-Funktion von  $\not{D}$  wie in Abschnitt 5.4.2. Ähnlich wie bei der Green-Funktion des Yamabe-Operators untersuchen wir nun seine Asymptotik in konformen Normalkoordinaten.

Zu diesem Zweck müssen wir zunächst eine gute Trivialisierung des Spinorbündels auf einer Umgebung von  $x_0$  konstruieren. Aufgrund der Resultate über konforme Normalkoordinaten, siehe Satz 4.1, können wir für jedes  $N \in \mathbb{N}$  (durch evtl. konforme Abänderung der Metrik) erreichen, dass  $\det g_{ij} = 1 + \mathcal{O}(r^N)$  in  $g$ -Normalkoordinaten und  $\text{scal}^g = \mathcal{O}(r^2)$ , wobei  $r := d(\cdot, x_0)$ . Wir nehmen  $N \geq 3$  an. Dann gilt insbesondere  $\text{ric}^g|_{x_0} = 0$ . Derartige Metriken  $g$  nennen wir *konform ausgewogen* in  $x_0$ , falls  $n \in \{3, 4, 5\}$ . Im Fall, dass  $g$  auf einer Umgebung von  $x_0$  konform flach ist, nennen wir  $g$  *konform ausgewogen*, wenn  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

Wir nutzen nun Normalkoordinaten bezüglich einer konform ausgewogenen Metrik  $g$  (kurz:  $g$ -Normalkoordinaten), um eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit einem Ball  $B_R(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  zu identifizieren. Auf dieser Umgebung ist dann also sowohl die euklidische Metrik  $g_{\text{eukl}}$  als auch die gegebene Riemannsche Metrik  $g$  gegeben und es gilt  $g = g_{\text{eukl}} + \mathcal{O}''(r^2)$  für  $r \rightarrow 0$  und sogar  $g = g_{\text{eukl}}$  im konform flachen Fall.

Die Identifikation von Spinoren in Unterabschnitt 5.4.3 liefert einen Isomorphismus  $\beta_g^{g_{\text{eukl}}} : B_R(0) \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma(U, g)$ , der eine geeignete Trivialisierung des Spinorbündels auf  $U$  ergibt. Diese Identifikation soll im folgenden genutzt werden, um in den oben beschriebenen Normalkoordinaten das Spinor-Bündel von  $(U, g)$  mit dem auf  $U$  eingeschränkten Spinorbündels des euklidischen Raums zu identifizieren.

**Definition 5.32.** Ein Schnitt  $\zeta \in \Gamma(U \setminus \{x_0\}; \mathbb{C}^m)$  nennen wir homogen von Grad  $k \in \mathbb{R}$ , falls für alle  $\lambda \in (0, 1]$  und  $x \in U \setminus \{x_0\} \cong B_R(0) \setminus \{0\}$  gilt:

$$\zeta(\lambda x) = \lambda^k \zeta(x).$$

Wir nennen in gerade bzw. ungerade, wenn für alle  $x \in U \setminus \{x_0\} \cong B_R(0) \setminus \{0\}$  gilt:

$$\zeta(-x) = \zeta(x), \quad \text{bzw.} \quad \zeta(-x) = -\zeta(x).$$

**Proposition 5.33 (Lem. 2.1 und Prop. 3.3 in [5]).** Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit, die konform ausgewogen in  $x_0 \in M$  ist mit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Wir nehmen an, dass gilt

- $n \in \{3, 4, 5\}$  oder
- $(M, g)$  ist flach auf einer Umgebung von  $x_0$  und  $n \geq 3$ .

Zu jedem  $\Phi \in \Sigma_{x_0} M$  gibt es dann einen glatten auf  $M \setminus \{x_0\}$  definierten glatten Schnitt  $\Gamma_\Phi$  von  $\Sigma M$  mit den folgenden Eigenschaft:

- (a)  $\not{D}^g \Gamma_\Phi = 0$  auf  $M \setminus \{x_0\}$ . (Wir sagen dazu:  $\Gamma_\Phi$  ist ein  $g$ -harmonischer Spinor auf  $M \setminus \{x_0\}$ .)
- (b) Auf einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  gilt in  $g$ -Normalkoordinaten der oben beschriebenen Trivialisierung von  $\Sigma M$  für

$$\Theta(x) := \Gamma_\Phi(x) - \frac{x}{r^n} \cdot \Phi :$$

- (i) Falls  $(M, g)$  flach auf einer Umgebung von  $x_0$  ist:  $\Theta \in C^\infty(U; \Sigma M)$ .
- (ii) Falls  $n \in \{3, 4\}$ : für alle  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$r^\varepsilon \Theta \in C^0(U; \Sigma M) \text{ und } r^{1+\varepsilon} |\nabla \Theta| \in C^0(U; \mathbb{R}).$$

- (iii) Falls  $n = 5$ :  $\Theta = \Xi + \Psi$ , wobei  $\Xi \in C^\infty(U \setminus \{x_0\}; \Sigma M)$  homogen von Grad  $-1$  und gerade ist und wobei für alle  $\alpha \in (0, 1)$  und für alle  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$r^\varepsilon \Psi \in C^0(U; \Sigma M) \text{ und } r^{1+\varepsilon} |\nabla \Psi| \in C^0(U; \mathbb{R}).$$

Wir erhalten auch den folgenden Zusatz, der allerdings im vorliegenden Buch nicht weiter benötigt wird.

**Zusatz 5.34.** Im Fall  $n = 3$  haben außerdem für alle  $\alpha \in (0, 1)$

$$\Theta \in C^{0, \alpha}(U; \Sigma M).$$

Insbesondere ist  $\Gamma_\Phi \in L^1(M \setminus \{x_0\}; \Sigma M) = L^1(M; \Sigma M)$  und definiert deswegen einen distributionellen Schnitt von  $\Sigma M \rightarrow M$ . Man kann durch partielle Integration nachrechnen, dass  $\not{D}^g G = -\omega_{n-1} \delta_{x_0} \Phi$ , wir werden diese Aussage aber nicht benötigen.

Wir beweisen Proposition 5.33 später, in Unterabschnitt 5.4.9.

### 5.4.6. PMT für kompakte Spin-Mannigfaltigkeiten

**Satz 5.35 (PMT für kompakte Spin-Mannigfaltigkeiten).** *Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  mit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Sei  $x_0 \in M$ . Ferner sei  $n \in \{3, 4, 5\}$  oder sei  $(M, g)$  konform flach nahe  $x_0$ . Wir definieren  $A \in \mathbb{R}$  wie in Proposition 5.3. Dann gilt  $A \geq 0$ . Haben wir  $A = 0$ , so ist  $(M, g)$  konform zur Standard-Sphäre  $\mathbb{S}^n$ .*

Da umgekehrt  $A = 0$  auf  $M = \mathbb{S}^n$  mit beliebigem  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  gilt, erhalten wir:

$A > 0$  genau dann, wenn  $(M, g)$  nicht zu  $\mathbb{S}^n$  konform ist.

Wie zuvor erklärt folgt hieraus der Satz der positiven Masse (PMT) in der klassischen Version (Satz 5.22) für asymptotisch euklidische Spin-Mannigfaltigkeiten, die durch eine Umstülpung einer kompakten Mannigfaltigkeit entstehen. Mit Lohkamps Argument, siehe Bemerkung 5.25 (3), folgt PMT dann auch (ohne Gleichheitsdiskussion) für alle asymptotisch euklidischen Spin-Mannigfaltigkeiten.

*Beweis von Satz 5.35.* (a) Wir wenden Proposition 5.33 mit einem  $\Phi \in \Sigma_{x_0} M$  mit  $|\Phi| = 1$  an. Sei wieder wie in Abschnitt 5.1  $\Gamma_{x_0}$  die Green-Funktion von  $Y^g$  und  $G := 4(n-1) \cdot \omega_{n-1} \cdot \Gamma_{x_0}$  die umgenormte Variante der Green-Funktion. Sei wieder  $\hat{g} := G^{p_c-2}g$  die auf  $\hat{M} := M \setminus \{x_0\}$  definierte Metrik. Wir haben  $\text{scal}^{\hat{g}} = 0$ .

Mit der oben konstruierten Identifikation von Spinoren zu verschiedenen Metriken können wir auch Spinoren auf  $(\hat{M}, \hat{g})$  mit Spinoren auf  $(M \setminus \{x_0\}, g)$  so identifizieren, dass das faserweise Skalarprodukt auf Spinoren bewahrt bleibt [35, 33, 34]. Wir schreiben  $\hat{D}$  für den Dirac-Operator auf  $(\hat{M}, \hat{g})$ . Die Formel für die Änderung von Dirac-Operatoren unter konformen Änderungen der Metrik [35, 33, 34] ergibt, dass

$$\hat{\Gamma}_\Phi := G^{-\frac{n-1}{n-2}} \Gamma_\Phi$$

die Gleichung  $\hat{D}\hat{\Gamma}_\Phi = 0$  erfüllt, das heißt  $\hat{\Gamma}_\Phi$  ist  $\hat{g}$ -harmonisch.

Aufgrund der Schrödinger-Lichnerowicz-Formel (5.41) haben wir

$$0 = \hat{\mathcal{D}}^2 \hat{\Gamma}_\Phi = \hat{\nabla}^* \hat{\nabla} \hat{\Gamma}_\Phi + \frac{\text{scal}^{\hat{g}}}{4} \hat{\Gamma}_\Phi = \hat{\nabla}^* \hat{\nabla} \hat{\Gamma}_\Phi.$$

Integration über  $M \setminus B_\varepsilon(x_0)$ ,  $\varepsilon > 0$  und partielle Integration liefern

$$0 = \int_{M \setminus B_\varepsilon(x_0)} \langle \hat{\nabla}^* \hat{\nabla} \hat{\Gamma}_\Phi, \hat{\Gamma}_\Phi \rangle \, d\text{vol}^{\hat{g}} = \int_{M \setminus B_\varepsilon(x_0)} |\hat{\nabla} \hat{\Gamma}_\Phi|^2 \, d\text{vol}^{\hat{g}} - \int_{S_\varepsilon(x_0)} \langle \hat{\nabla}_{\hat{\nu}} \hat{\Gamma}_\Phi, \hat{\Gamma}_\Phi \rangle \, d\text{vol}_{n-1}^{\hat{g}}.$$

Hierbei bezeichnet  $S_\varepsilon(x_0)$  den Rand  $\partial B_\varepsilon(x_0)$ ,  $\hat{\nu}$  ist das Einheitsnormalenvektorfeld  $S_\varepsilon(x_0)$  bezüglich  $\hat{g}$ , das in den Ball hinein zeigt, und wir schreiben wieder  $d\text{vol}_{n-1}^{\hat{g}}$  für das riemannsche Volumenelement von  $S_\varepsilon(x_0)$ . Wir haben deswegen gezeigt:

$$\int_{M \setminus B_\varepsilon(x_0)} |\hat{\nabla} \hat{\Gamma}_\Phi|^2 \, d\text{vol}^{\hat{g}} = \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon(x_0)} \partial_{\hat{\nu}} |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 \, d\text{vol}_{n-1}^{\hat{g}} \quad (5.46)$$

(b) Falls  $\varepsilon$  klein genug ist, haben wir

$$\hat{\nu} = -G^{-\frac{2}{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} = -(\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) \frac{\partial}{\partial r} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{dvol}_{n-1}^{\hat{g}} &= G^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \mathrm{dvol}_{n-1}^g = G^{\frac{2(n-1)}{n-2}} (\varepsilon^{n-1} + o(\varepsilon^{n-1})) \mathrm{dvol}^{\mathbb{S}^{n-1}} \\ &= (\varepsilon^{-(n-1)} + o(\varepsilon^{-(n-1)})) \mathrm{dvol}^{\mathbb{S}^{n-1}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

wobei  $\mathrm{dvol}^{\mathbb{S}^{n-1}}$  das Standardvolumenelement von  $\mathbb{S}^{n-1}$  bezeichnet, und

$$\begin{aligned} |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 &= G^{-2\frac{n-1}{n-2}} |\Gamma_\Phi|^2 \\ &= \left( \frac{1}{r^{n-2}} + A + \mathcal{O}'(r) \right)^{-2\frac{n-1}{n-2}} \left| \frac{1}{r^{n-1}} \frac{x}{r} \cdot \Phi + \Theta(x) \right|^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 &= (1 + Ar^{n-2} + \mathcal{O}'(r^{n-1}))^{-2\frac{n-1}{n-2}} \\ &\quad \cdot \left( 1 + 2r^{n-1} \operatorname{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \Theta(x) \right\rangle + r^{2(n-1)} |\Theta(x)|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Diesen Ausdruck wollen wir nach  $r$  ableiten. Der erste Faktor ergibt

$$\begin{aligned} &\partial_r (1 + Ar^{n-2} + \mathcal{O}'(r^{n-1}))^{-2\frac{n-1}{n-2}} \\ &= -2\frac{n-1}{n-2} (A(n-2)r^{n-3} + \mathcal{O}(r^{n-2})) (1 + \mathcal{O}'(r^{n-2}))^{-2\frac{n-1}{n-2}-1} \\ &= -2(n-1)Ar^{n-3} + \mathcal{O}(r^{n-2}) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Der Spinor  $\Phi$  ist als paralleler Schnitt von  $\Sigma^{g_{\text{eukl}}} \mathbb{R}^n$  zu verstehen. Deswegen gilt bezüglich  $g_{\text{eukl}}$  und den assoziierten Zusammenhang

$$\nabla_r \left( \frac{x}{r} \cdot \Phi \right) = \left( \nabla_r \frac{x}{r} \right) \cdot \Phi + \frac{x}{r} \cdot \nabla_r \Phi = 0 + 0 = 0.$$

Der zweite Faktor ergibt somit

$$\begin{aligned} &\partial_r \left( 1 + 2r^{n-1} \operatorname{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \Theta(x) \right\rangle + r^{2(n-1)} |\Theta(x)|^2 \right) \\ &= 2(n-1)r^{n-2} \operatorname{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \Theta(x) \right\rangle + 2r^{n-1} \operatorname{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \nabla_r \Theta(x) \right\rangle \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$+ 2(n-1)r^{2n-3} |\Theta(x)|^2 + 2r^{2n-2} \langle \Theta(x), \nabla_r \Theta(x) \rangle. \quad (5.52)$$

Proposition 5.33 ergibt  $\Theta = \mathcal{O}(r^{-1})$  und  $\nabla \Theta = \mathcal{O}(r^{-2})$ . Die Terme in (5.52) haben deswegen und wegen  $n \geq 3$  die Asymptotik  $\mathcal{O}(r^{2n-3-1-1}) + \mathcal{O}(r^{2n-2-1-2}) = \mathcal{O}(r^{2n-5}) = \mathcal{O}(r^{n-2})$ . Insgesamt haben wir bisher

$$\partial_r |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 = -2(n-1)A\varepsilon^{n-3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2}) + (5.51).$$

- (c) Wir betrachten nun zunächst nur den Fall  $n \in \{3, 4\}$  und den konform flachen Fall. Proposition 5.33 ergibt in diesem Fall eine bessere Abschätzung: für alle  $\alpha \in (0, 1)$  gilt  $\Theta = \mathcal{O}(r^{-\alpha})$  und  $\nabla\Theta = \mathcal{O}(r^{-1-\alpha})$ . Die Terme in (5.51) haben deswegen dann die Asymptotik  $\mathcal{O}(r^{n-2-\alpha}) + \mathcal{O}(r^{n-1-1-\alpha}) = \mathcal{O}(r^{n-2-\alpha})$ . Wir erhalten somit auf  $S_\varepsilon(x_0)$  für kleines  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\partial_r |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 &= -2(n-1) A \varepsilon^{n-3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-2-\alpha}) \\ &= -2(n-1) A \varepsilon^{n-3} + o(\varepsilon^{n-3}).\end{aligned}\quad (5.53)$$

Wir setzen (5.47), (5.48) und (5.53) in (5.46) ein und erhalten für kleines  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{M \setminus B_\varepsilon(x_0)} |\hat{\nabla} \hat{\Gamma}_\Phi|^2 \, \text{dvol}^{\hat{g}} \\ &= -\frac{1}{2}(\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) \int_{S_\varepsilon(x_0)} \partial_r |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 \, \text{dvol}_{n-1}^{\hat{g}} \\ &= (n-1) A \int_{S^{n-1}} \text{dvol}^{S^{n-1}} + o(1) \\ &= (n-1) \omega_{n-1} A + o(1)\end{aligned}\quad (5.54)$$

Dies impliziert  $A \geq 0$ .

- (d) Der Beweis von  $A \geq 0$  im Fall  $n = 5$  ist ähnlich. Der wesentliche Unterschied ist, dass wir gemäß Proposition 5.33 (b) (iii)  $\Theta$  als  $\Theta = \Xi + \Psi$  schreiben. Wir erhalten

$$(5.51) = 2(n-1)r^{n-2} \text{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \Xi(x) \right\rangle + 2r^{n-1} \text{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \nabla_r \Xi(x) \right\rangle \quad (5.55)$$

$$+ 2(n-1)r^{n-2} \text{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \Psi(x) \right\rangle + 2r^{n-1} \text{Re} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \Phi, \nabla_r \Psi(x) \right\rangle. \quad (5.56)$$

In der Zerlegung  $\Theta = \Xi + \Psi$  ergibt Proposition 5.33 für  $\Psi$  dieselbe Asymptotik, die wir in Beweisteil (c) für  $\Theta$  hatten. Die Terme in  $\Psi$ , d. h. in Zeile (5.56), können also wie zuvor mit  $\mathcal{O}(r^{n-2-\alpha})$  abgeschätzt werden.

Die Terme in Zeile (5.55) sind homogen von Grad  $(n-2) + 0 - 1 = (n-1) + 0 - 2 = n-3 (= 2)$ , und wir untersuchen nun deren Parität. Das radiale Vektorfeld  $\partial_r = \frac{x}{r}$  ist ungerade, der konstante (genauer: parallele) Spinor  $\Phi$  ist gerade, und  $\Xi$  ist nach Proposition 5.33 ebenfalls gerade. Somit ist der erste Summand in (5.55) eine ungerade Funktion.

Radiale Ableitungen gerader Terme sind wiederum gerade, also ist auch  $\nabla_r \Xi$  gerade, woraus wiederum folgt, dass die gesamte Zeile (5.55) eine ungerade Funktion von Homogenität  $n-3$  ist. Wir schreiben sie in der Form  $r^{n-3} u(x/r)$ , wobei  $u : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  eine ungerade glatte Funktion ist.

Wir erhalten auf der Sphäre  $S_\varepsilon(X_0)$  mit  $r = \varepsilon$

$$\partial_r |\hat{\Gamma}_\Phi|^2 = -2(n-1) A \varepsilon^{n-3} + u \varepsilon^{n-3} + o(\varepsilon^{n-3}). \quad (5.57)$$

□

Der ungerade Term  $u$  verschwindet nach Integration über  $S^{n-1}$ , das heißt (5.54) und  $A \geq 0$  bleiben gültig.

- (e) Jetzt nehmen wir  $A = 0$  an. Aus (5.54) folgt  $\widehat{\nabla}\widehat{\Gamma}_\Phi = 0$  auf  $M \setminus \{x_0\}$ , und deshalb ist  $\widehat{\Gamma}_\Phi$  parallel.

Wir wählen nun eine Basis  $(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ ,  $N := \lfloor n/2 \rfloor$  von  $\Sigma_{x_0}M$ . Wir können die Green-Funktion  $\Gamma_{\Phi_i}$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  wie oben konstruieren und sehen, dass  $\widehat{\Gamma}_{\Phi_i}$  parallel ist. Aus (5.42) folgt, dass  $(\Gamma_{\Phi_1}, \dots, \Gamma_{\Phi_N})$  als Familie von Vektoren in  $\Gamma(M \setminus \{x_0\}; \Sigma M)$  linear unabhängig ist. Somit ist auch  $(\widehat{\Gamma}_{\Phi_1}, \dots, \widehat{\Gamma}_{\Phi_N})$  in diesem Sinne linear unabhängig, und wegen der Parallelität dieser Schnitte sind sie dann auch in jedem Punkt linear unabhängig. Wir erhalten somit eine parallele Trivialisierung des Spinorbündels von  $(M \setminus \{x_0\}, \hat{g})$ . Deswegen ist  $(M \setminus \{x_0\}, \hat{g})$  flach, ist also isometrisch zu  $\mathbb{R}^n/G$  wobei  $G$  eine diskrete Gruppen von euklidischen Bewegungen ist, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{R}^n$  operiert. Wir wollen zeigen, dass  $G$  trivial ist.

$G$  ist eine Untergruppe der (orientierungserhaltenden) euklidischen Bewegungsgruppe  $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ . Da der Quotient  $\mathbb{R}^n/G$  spin ist, besitzt  $G$  einen Lift  $\widehat{G}$  in der Gruppe  $Spin(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ , d. h. die Einschränkung der Überlagerung  $Spin(n) \ltimes \mathbb{R}^n \rightarrow SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$  auf  $\widehat{G}$  ergibt einen Gruppen-Isomorphismus  $\widehat{G} \rightarrow G$ . Wir haben dann als Bündel mit Zusammenhang  $\Sigma(\mathbb{R}^n/G) = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N)/\widehat{G}$ . Da dieses Bündel parallel trivialisiert wird, verschwindet die  $Spin(n)$ -Komponente von  $\widehat{G}$ , d. h.  $\widehat{G}$  und damit  $G$  bestehen nur aus Translationen (in  $\mathbb{R}^n$ ). Nach einer potentiellen Isometrie von  $\mathbb{R}^n$  ist somit  $G$  ein Gitter (d. h. eine kokompakte, diskrete, eigentlich diskontinuierliche Untergruppe) in  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ . Die Mannigfaltigkeit  $(M \setminus \{x_0\}, \hat{g})$  ist also isometrisch zu  $((\mathbb{R}^k/G) \times \mathbb{R}^{n-k}, g_{\text{eukl}})$  und gleichzeitig asymptotisch euklidisch. Es gibt also ein Kompaktum  $K \subset (\mathbb{R}^k/G) \times \mathbb{R}^{n-k}$ , so dass  $L := ((\mathbb{R}^k/G) \times \mathbb{R}^{n-k}, g_{\text{eukl}}) \setminus K$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R(0)$  ist, es gilt also insbesondere  $\pi_1(L) = \{1\}$ .

Da  $K$  als kompakt angenommen wurde, gibt es ein  $\varrho > 0$  mit  $L' := (\mathbb{R}^k/G) \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \overline{B}_\varrho(0)) \subset L$ . Wir haben  $\pi_1(L') = \pi_1(\mathbb{R}^n/G) = G$ , und da die von den Inklusionen induzierte Komposition  $\pi_1(L') \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n/G)$  die Identität ist, folgt, dass  $G$  injektiv in  $\pi_1(L) = \{1\}$  abgebildet wird. Wir haben also gezeigt, dass  $G$  trivial ist.

Wir haben somit eine Isometrie  $\vartheta : (\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl}}) \rightarrow (M \setminus \{x_0\}, \hat{g})$  erhalten. Es folgt, dass dann die Weyl-Krümmung von  $\hat{g}$  und damit auch von  $g$  auf  $M \setminus \{x_0\}$  verschwindet, und aus Stetigkeitsgründen verschwindet deswegen die Weyl-Krümmung von  $g$  auf ganz  $M$ . Außerdem sehen wir, dass  $M \setminus \{x_0\}$  und damit  $M$  einfach zusammenhängend ist.

Somit ist  $(M, g)$  einfach zusammenhängend, konform flach und geschlossen, also konform zur runden Sphäre. Aus Kuipers Theorem (Satz 2.35) folgt dann, dass  $(M, g)$  konform äquivalent zu der Standard-Sphäre  $\mathbb{S}^n$  ist.

### 5.4.7. Der Dirac-Operator in Polarkoordinaten

Wir betrachten nun den Dirac-Operator auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  in Polarkoordinaten, welche durch

$$(r, \vartheta) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^{n-1}, \quad r((x^1, \dots, x^n)) := \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}, \quad \vartheta(x) := \frac{x}{r(x)}$$

gegeben sind. Ist  $y : U \rightarrow V$  eine Karte von  $\mathbb{S}^{n-1}$ , so ist  $(r, y \circ \vartheta)$  eine Karte von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Das zur  $r$ -Variablen gehörende Koordinatenvektorfeld  $\partial_r$  ist gegeben durch

$$\partial_r = \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{r} \partial_i,$$

und ist unabhängig von der Karte  $y$ .

Sei  $S_r$  die Sphäre von Radius  $r$  um 0, und wir haben  $T_x S_r = \partial_r^\perp$ . Für  $X \in T(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und für ein Vektorfeld  $V \in \Gamma(T(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$  sei  $\partial_X V$  die Ableitung im Sinne der elementaren Analysis, also bezüglich des euklidischen Zusammenhangs. Ist  $X = (X^1, \dots, X^n)$  tangential an  $S_r$ , also senkrecht zu  $\partial_r$ , so haben wir  $\partial_X r = 0$ , und somit rechnet man nach

$$\partial_X \partial_r = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_X x^i}{r} \partial_i = \sum_{i=1}^n \frac{X^i}{r} \partial_i = \frac{X}{r}.$$

Die Weingarten-Abbildung von  $S_r$  im euklidischen  $\mathbb{R}^n$  ist dann  $W(X) := -\partial_X \partial_r = -\frac{1}{r} X$ . Für  $X \in TS_r$  und für ein Vektorfeld  $V \in \Gamma(T(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ , das in  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tangential zu  $S_{|x|}$  ist, sei  $\nabla_X^S V$  die kovariante Ableitung bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs der Sphären. Nach Definition der (vektorwertigen) zweiten Fundamentalform gilt

$$\partial_X V = \nabla_X^S V + \Pi(X, V) = \nabla_X^S V - \frac{1}{r} \langle X, V \rangle \partial_r,$$

wobei wir  $\Pi(X, V) = \langle W(X), V \rangle \partial_r$  genutzt haben. Wir bekommen insbesondere  $\Pi(X, Y) = -\frac{1}{r} g(X, Y) \partial_r$ .

Dies impliziert für Spinoren  $\psi \in \Gamma(\Sigma(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ :

$$\partial_X \psi = \nabla_X^S \psi + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} e_j \cdot (\Pi(X, e_j)) \cdot \psi = \nabla_X^S \psi - \frac{1}{2r} X \cdot \partial_r \cdot \psi,$$

wobei  $e_1, \dots, e_{n-1}$  ein lokal definierter orthonormaler Rahmen von  $TS_r$  ist.

Sei nun  $\not{D}^{g_{\text{eukl}}}$  der euklidische Dirac-Operator und  $\not{D}^S$  der Dirac-Operator der Sphäre  $S_r$ . Wir identifizieren auch homothetisch  $S_r$  mit  $S_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ . Die von  $g_{\text{eukl}}$  induzierte Metrik hierauf ist dann  $r^2 g_{\text{sph}}$ . Wenn nun  $\not{D}^S$  der Dirac-Operator bezüglich der sphärischen Standard-Metrik  $g_{\text{sph}}$  ist, dann haben wir  $\not{D}^{S_r} = \frac{1}{r} \not{D}^S$ .

Wir rechnen

$$\not{D}^{g_{\text{eukl}}} \psi = \partial_r \cdot \nabla_{\partial_r} \psi + \not{D}^S \psi + \frac{1}{2r} (n-1) \partial_r \cdot \psi$$

$$= \frac{1}{r} \partial_r \cdot \left( \nabla_{r\partial_r} \psi - \partial_r \cdot \not{D}^S \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right)$$

Es gilt  $\partial_r \cdot \not{D}^S \psi = -\not{D}^S(\partial_r \cdot \psi)$ . Setzen wir  $\alpha_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \partial_r) \in \text{Cl}_n$ , dann erhalten wir  $\alpha_+ \cdot \alpha_- = \alpha_- \cdot \alpha_+ = 1$  und  $\partial_r \cdot \alpha_- = \alpha_+$  und somit für alle Spinoren  $\varphi$

$$\alpha_- \cdot \partial_r \cdot \not{D}^S(\alpha_+ \cdot \varphi) = \alpha_- \cdot \partial_r \cdot \alpha_- \cdot \not{D}^S \varphi = \alpha_- \cdot \alpha_+ \cdot \not{D}^S \varphi = \not{D}^S \varphi.$$

In anderen Worten:  $\partial_r \cdot \not{D}^S$  und  $\not{D}^S$  sind vermöge  $\alpha_+$  konjugiert und haben insbesondere dasselbe Spektrum, nämlich

$$\text{spec} := \left\{ \frac{n-1}{2} + t \mid t \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ -\frac{n-1}{2} - t \mid t \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

siehe [58, 12].

Ist nun  $\psi$  homogen von Grad  $\ell$  dann haben wir  $\nabla_{r\partial_r} \psi = \ell \psi$ , die Eigenräume von  $\nabla_{r\partial_r}$  zum Eigenwert  $\ell$  sind genau die homogenen Spinorfelder von Grad  $\ell$ . Da die Operatoren  $\nabla_{r\partial_r}$  und  $\partial_r \cdot \not{D}^S$  kommutieren, kann man jedes homogene Spinorfeld in Eigenräume von  $\partial_r \cdot \not{D}^S$  zerlegen. Sei nun  $\psi$  homogen von Grad  $\ell$  und es gelte  $\partial_r \cdot \not{D}^S \psi = \mu \psi$ .

Wir erhalten dann

$$\not{D}^{g_{\text{eukl}}} \psi = \frac{1}{r} \partial_r \cdot \left( \ell - \mu + \frac{n-1}{2} \right) \psi. \quad (5.58)$$

**Lemma 5.36.** *Sei  $\varphi$  ein homogener Schnitt von  $\Sigma(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  von Grad  $\ell \in \mathbb{R} \setminus (\{-n-t \mid t \in \mathbb{N}_0\} \cup \{-1+t \mid t \in \mathbb{N}_0\})$ . Dann existiert genau ein homogener Schnitt  $\psi$  von  $\Sigma(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  von Grad  $\ell+1$ , so dass  $\not{D}^{g_{\text{eukl}}} \psi = \varphi$ . Ist  $\varphi$  gerade (bzw. ungerade), so ist  $\psi$  ungerade (bzw. gerade).*

*Beweis.*

Im folgenden sei  $\text{spec} \subset \mathbb{R}$  das Spektrum von  $\partial_r \cdot \not{D}^S$ . Die Menge  $\text{spec}$  ist abzählbar unendlich und alle Summen über die Indexmenge  $\text{spec}$  sind als Reihen zu verstehen, die in  $L^2(S_r; \Sigma M)$  für ein  $r > 0$  (und damit auf Grund der Homogenität für alle  $r > 0$ ) konvergieren. Sei  $\varphi$  ein homogener Schnitt von Grad  $\ell$ . Wir zerlegen

$$\varphi = \sum_{\mu \in \text{spec}} \varphi_{\mu}, \quad \partial_r \cdot \not{D}^S \varphi_{\mu} = \mu \varphi_{\mu}.$$

Das Spinorfeld

$$\psi_{\mu} := -r \partial_r \cdot \left( \ell + 1 - \mu + \frac{n-1}{2} \right)^{-1} \varphi_{\mu}, \quad (5.59)$$

ist wohldefiniert wegen der Voraussetzung an  $\ell$ , und es ist homogen von Grad  $\ell+1$ . Aus (5.58) folgt  $\not{D}^{g_{\text{eukl}}} \psi_{\mu}$ . Es gibt eine Konstante  $C(\ell)$ , so dass

$$\left| \ell + 1 - \mu + \frac{n-1}{2} \right|^{-1} \leq C(\ell) \frac{1}{1 + |\mu|}.$$



Daraus sieht man, dass  $\psi := \sum_{\mu \in \text{spec}} \psi_\mu$  auf jedem Kompaktum in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  in  $L^2$  und in  $H^1$  konvergiert. Deswegen gilt  $\not{D}^{\text{eukl}} \psi = \varphi$ . Mit sieht mit ähnlichen Argumenten, dass dies die einzige Möglichkeit ist, ein solches  $\psi$  zu finden, das homogen von Grad  $\ell + 1$  ist. Setzen wir  $\tilde{\psi}(x) := \psi(-x)$ , dann erhalten wir  $(\not{D}^{\text{eukl}} \tilde{\psi})(x) = -(\not{D}^{\text{eukl}} \psi)(-x) = -\varphi(-x)$ . Ist also  $\varphi$  ungerade, dann gilt  $\psi = \tilde{\psi}$  aufgrund der Eindeutigkeit von  $\psi$ ; und ist  $\varphi$  gerade dann gilt  $\psi = -\tilde{\psi}$ .  $\square$

### 5.4.8. Ein Regularitäts-Lemma

In diesem Abschnitt ist  $\not{D}$  immer der euklidische Dirac-Operator auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 5.37 (Regularitäts-Lemma).** *Sei  $U$  ein Ball um 0 in  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $\Theta$  ein glatter auf  $U \setminus \{0\}$  definierter Schnitt des Spinorbündels. Wir nehmen an, dass  $\not{D}(\Theta) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$  und  $\partial_i \not{D}(\Theta) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$  für  $r \rightarrow 0$ . Dann können wir für alle  $\varepsilon > 0$  die Funktionen  $r^\varepsilon \Theta$  und  $r^{1+\varepsilon} |\nabla \Theta|$  stetig auf  $U$  fortsetzen.*

*Beweis.*

Da die Behauptung auf eine Umgebung von 0 lokalisiert ist, können wir annehmen, dass der Träger von  $\Theta$  beschränkt ist und in  $B_R(0) \cap (U \setminus \{0\})$  enthalten ist, wobei  $R$  so gewählt ist, dass  $\overline{B_R(0)} \subset U$ . Man beachte: Zur Definition des Trägers ist der Abschluss im Definitionsbereich, also in  $(U \setminus \{0\})$  zu nehmen. Wir setzen nun  $\Theta$  außerhalb von  $U$  durch 0 fort. Die fortgesetzte Funktion  $\Theta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \Sigma_n$  ist glatt und verschwindet außerhalb von  $B_0(R)$  für obiges  $R$ . Wegen  $\not{D}\Theta \in L^q(U; \Sigma_n)$  für alle  $q < n$  folgt durch Regularitätstheorie elliptischer Operatoren erster Ordnung  $\Theta \in H^{1,q}(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für alle  $q < n$ . Der Sobolev'sche Einbettungssatz ergibt dann  $\Theta \in L^q(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für alle  $q \in (1, \infty)$ . Ist  $f$  eine glatte Funktion und  $\varphi$  ein Spinor, so gilt die Formel

$$\not{D}(f\varphi) = \text{grad } f \cdot \varphi + f \not{D}\varphi.$$

Zusammen mit  $|\text{grad } r| = 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} |\not{D}(r^\varepsilon \Theta)| &= |\varepsilon r^{\varepsilon-1} \text{grad } r \cdot \Theta + r^\varepsilon \not{D}(\Theta)| \\ &\leq \varepsilon r^{\varepsilon-1} |\text{grad } r| |\Theta| + r^\varepsilon |\not{D}(\Theta)| \\ &\leq \varepsilon r^{\varepsilon-1} |\Theta| + \mathcal{O}(r^{\varepsilon-1}). \end{aligned}$$

Wir wählen nun ein  $q > n$  mit  $q(1 - \varepsilon) < n$ . Man prüft leicht, dass der Term  $\mathcal{O}(r^{\varepsilon-1})$  dann in  $L^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  ist.

Für  $p, p_* \in (1, \infty)$  mit  $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$  wenden wir die Hölder'sche Ungleichung an. Alle Integrale über  $B_R(0)$  erfolgen unter Verwendung des (euklidischen) Lebesguesche-Maßes.

$$\int_{B_R(0)} |r^{\varepsilon-1} \Theta|^q \leq \left( \int_{B_R(0)} r^{(\varepsilon-1)qp} \right)^{1/p} \left( \int_{B_R(0)} |\Theta|^{qp_*} \right)^{1/p_*}$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} C(p, R) \|\Theta\|_{L^{qp_*}}^q < \infty.$$

Bei der Ungleichung (\*) haben wir angenommen, dass wir  $p > 1$  (und damit auch  $p_*$ ) so gewählt haben, dass  $q(1 - \varepsilon)p < n$ . sehen wir dann  $\mathcal{D}(r^\varepsilon \Theta) \in L^q(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für das so gewählte  $q > n$ . Auf Grund der Regularitätstheorie folgt wiederum  $r^\varepsilon \Theta \in H^{1,q}(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  und mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz dann  $r^\varepsilon \Theta \in C^0(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$ . Dies zeigt den ersten Teil von Lemma 5.37.

Für den zweiten Teil wenden wir dasselbe Argument zweimal an. Für alle  $i = 1, \dots, n$  haben wir  $\mathcal{D}(\partial_i \Theta) = \partial_i \mathcal{D} \Theta = \mathcal{O}(r^{-2})$  und damit  $\mathcal{D}(\partial_i \Theta) \in L^q(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für alle  $q < \frac{n}{2}$ . Rechnungen auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , ähnlich zur vorigen, liefern

$$|\mathcal{D}(r^{1+\varepsilon} \partial_i \Theta)| \leq (1 + \varepsilon) r^\varepsilon |\partial_i \Theta| + \mathcal{O}(r^{\varepsilon-1}) \quad (5.60)$$

und

$$|\mathcal{D}(r^\varepsilon \partial_i \Theta)| \leq \varepsilon r^{\varepsilon-1} |\partial_i \Theta| + \mathcal{O}(r^{\varepsilon-2}). \quad (5.61)$$

Mit Regularitätstheorie erhalten wir  $\partial_i \Theta \in H_1^q(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für alle  $q < \frac{n}{2}$ , und mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz bekommen wir dann  $\partial_i \Theta \in L^q(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für alle  $q < n$ . Wir wählen nun ein  $q > n/2$  mit  $q(2 - \varepsilon) < n$ , und dann  $p \in (2, \infty)$ ,  $p_* \in (1, 2)$  mit  $q(2 - \varepsilon)p < 2n$  und  $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$ . Anwendung der Hölder'schen Ungleichung, analog zu oben, ergibt

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |r^{\varepsilon-1} \partial_i \Theta|^q &\leq \left( \int_{B_R(0)} r^{(\varepsilon-1)qp} \right)^{1/p} \left( \int_{B_R(0)} |\partial_i \Theta|^{qp_*} \right)^{1/p_*} \\ &\leq C(p, R) \|\partial_i \Theta\|_{L^{qp_*}}^q < \infty. \end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert, da aus der Wahl von  $q$  und  $p$  die Ungleichung  $q(1 - \varepsilon)p < q(2 - \varepsilon)p/2 < n/2$  folgt. Die obige  $L^{qp_*}$ -Norm ist endlich, da  $qp_* < n$ . Wir haben also ein  $q > \frac{n}{2}$ , nahe an  $\frac{n}{2}$ , gefunden, so dass  $r^{\varepsilon-1} |\partial_i \Theta| \in L^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ .

Die  $L^q$ -Norm des  $\mathcal{O}(r^{\varepsilon-2})$ -Terms wird bis auf eine multiplikative Konstante durch  $\int_0^1 r^{(\varepsilon-2)q} r^{n-1} dr$  abgeschätzt, und dies ist endlich, genau dann, wenn  $(\varepsilon - 2)q + n - 1 > -1$ , d. h. wenn  $q(2 - \varepsilon) < n$ . Dies gilt nach Wahl von  $q$ .

Zusammen mit (5.61) zeigt dies, dass  $\mathcal{D}(r^\varepsilon \partial_i \Theta) \in L^q(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für das oben gewählte  $q > \frac{n}{2}$ . Mit Regularitätstheorie und Sobolev'schen Einbettungssätzen erhalten wir  $r^\varepsilon \partial_i \Theta \in L^s(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  für ein  $s > n$ . Nun nutzen wir die bereits oben begründete Aussage  $\mathcal{O}(r^{\varepsilon-1}) \in L^s(\mathbb{R}; \Sigma_n)$  für ein  $s > n$ , ausreichend nahe an  $n$ . Abschätzung (5.60) ergibt dann  $|\mathcal{D}(r^{1+\varepsilon} \partial_i \Theta)| \in L^s(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  für dieses  $s > n$ . Unter erneuter Nutzung von Regularitätstheorie und Sobolev'schen Einbettungssätzen leiten wir schließlich  $r^{1+\varepsilon} \partial_i \Theta \in C^0(\mathbb{R}^n; \Sigma_n)$  her. Dies zeigt  $r^{1+\varepsilon} |\nabla \Theta| \in C^0(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Bemerkung 5.38.** Indem man die Aussage zunächst für ein etwas kleineres  $\varepsilon$  anwendet, sieht man leicht, dass die stetigen Fortsetzungen von  $r^\varepsilon \Theta$  und  $r^{1+\varepsilon} |\nabla \Theta|$  in 0 den Wert 0 annehmen.

### 5.4.9. Beweis von Proposition 5.33

Sei  $g$  konform ausgewogen in  $x_0$  und  $V$  eine ausreichend kleiner Ball um  $x_0$ . Sei  $\eta : M \rightarrow [0, 1]$  glatt mit Träger in  $V$ , so dass  $\eta \equiv 1$  auf einer Umgebung  $U \subset V$  von  $x_0$ . Wir identifizieren  $V$  mit dem Normalkoordinatenball in  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $x_0 \cong 0$ ,  $r = d(x, x_0) \cong |x|$ . Nun ist

$$\Gamma_0(x) := \begin{cases} \eta(x) \frac{x}{r^n} \cdot \Phi & \text{falls } x \in V, \\ 0 & \text{falls } x \notin V \end{cases}$$

ein glatter Schnitt von  $\Sigma(M \setminus \{x_0\})$  mit Träger in  $V$ , und dies gilt natürlich dann auch für  $\mathcal{D}^g \Gamma_0$ .

(i) Sei  $(M, g)$  flach auf  $V$ , also o.B.d.A.  $g = g_{\text{eukl}}$  auf  $V$ . Dann gilt

$$\mathcal{D}^g \left( \frac{x}{r^n} \cdot \Phi \right) = \mathcal{D}^{g_{\text{eukl}}} \left( \frac{x}{r^n} \cdot \Phi \right) = 0 \text{ auf } U \setminus \{x_0\}.$$

Der Träger von  $\mathcal{D}^g \Gamma_0$  ist somit in  $V \setminus U$  enthalten und setzt sich deswegen zu einem glatten, auf ganz  $M$  definierten Schnitt fort. Da  $\mathcal{D}^g$  ein invertierbarer Operator  $\Gamma(\Sigma M) \rightarrow \Gamma(\Sigma M)$  ist, gibt es einen glatten Schnitt  $\Theta$  von  $\Sigma M$  mit  $\mathcal{D}^g \Theta = -\mathcal{D}^g \Gamma_0$ . Wir setzen  $\Gamma_\Phi(x) := \Gamma_0 + \Theta$  und erhalten dann die Proposition in diesem Fall.

Der Beweis in den verbleibenden Fällen ist ähnlich. Wir wenden Lemma 5.29 und Zusatz 5.31 an. Nun sind aber zusätzliche Terme zu berücksichtigen. Aufgrund unserer Annahmen haben wir  $\text{Ric}^g|_{x_0} = 0$ , so dass der führende Term der zusätzlichen Terme verschwindet. Wir setzen  $\varrho := \mathcal{D}^g \Gamma_0$  und wir rechnen auf  $U$ :

$$\begin{aligned} \varrho &= \mathcal{D}^g \left( \frac{x}{r^n} \cdot \Phi \right) - \underbrace{\mathcal{D}^{g_{\text{eukl}}} \left( \frac{x}{r^n} \cdot \Phi \right)}_{=0} \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n x^\alpha x^\beta T^g \left( e_\alpha, e_\beta, \frac{x}{r^n} \cdot \Phi \right) + \mathcal{O}'(r^{4-n}) \\ &= \mathcal{O}'(r^{3-n}). \end{aligned}$$

(ii) Im Fall  $n = 3$  ist  $\varrho$  also beschränkt und somit insbesondere in  $L^2$ . Im Fall  $n = 4$  ist  $\varrho \in \mathcal{O}'(r^{-1})$  und deswegen gilt  $\varrho \in L^2(M; \Sigma M)$ . Da  $\mathcal{D}^g : H^{1,2}(M; \Sigma M) \rightarrow L^2(M; \Sigma M)$  invertierbar ist, erhalten wir beiden Fällen  $n \in \{3, 4\}$  ein  $\Theta \in H^{1,2}(M; \Sigma M)$  mit  $\mathcal{D}^g \Theta = -\varrho$ . Wiederum setzen wir  $\Gamma_\Phi(x) := \Gamma_0 + \Theta$ , erhalten  $\mathcal{D}^g \Gamma_\Phi(x) = 0$  auf  $M \setminus \{0\}$ . Aufgrund elliptischer Regularitätsaussagen für elliptische Differentialoperatoren erster Ordnung erhalten wir die Glattheit von  $\Gamma_\Phi(x)$  auf  $M \setminus \{0\}$ . Das Regularitäts-Lemma 5.37 liefert dann die verbleibenden Aussagen falls  $n \in \{3, 4\}$ .

(iii) Im Fall  $n = 5$  betrachten wir zunächst den homogenen Anteil von  $\varrho$  der führenden Ordnung, nämlich

$$\varrho_1 := \sum_{\alpha, \beta=1}^n x^\alpha x^\beta T^g \left( e_\alpha, e_\beta, \frac{x}{r^n} \cdot \Phi \right).$$

Dieser Term  $\varrho_1$  ist homogen von Grad  $-2$  und ungerade, und es gilt  $\varrho - \varrho_1 \in \mathcal{O}'(r^{-1})$ . Mit Lemma 5.36 erhalten wir einen auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$  definierten und glatten gerade homogenen Schnitt  $\Xi$  von Grad  $-1$ , der  $\mathcal{D}^g \Xi = -\varrho_1$  auf dem  $U \setminus \{0\}$  erfüllt. Zu  $\varrho_2 := \varrho - \mathcal{D}^g(\eta \Xi) \in \mathcal{O}'(r^{-1})$  können wir analog zu den obigen Fällen ein  $\Psi$  mit  $\mathcal{D}^g \Psi = -\varrho_2$  und den anderen gewünschten Eigenschaften finden. Die Aussage folgt dann für  $\Gamma_\Phi = \Gamma_0 + \eta \Xi + \Psi$ .

Der Beweis der Proposition ist nun vollständig. Es verbleibt Zusatz 5.34 zu zeigen.

Im Fall  $n = 3$  ist  $\varrho$  also beschränkt und somit in  $L^q$  für alle  $q > 1$ . Da  $\mathcal{D}^g : H^{1,2}(M; \Sigma M) \rightarrow L^2(M; \Sigma M)$  invertierbar ist, gibt es ein  $\Theta \in H^{1,2}(M; \Sigma M)$  mit  $\mathcal{D}^g \Theta = -\varrho$ . Aufgrund elliptischer Regularitätsaussagen, die ähnlich zu Satz 1.71 für elliptische Differentialoperatoren erster Ordnung gelten, erhalten wir  $\Theta \in H^{1,q}(M, \Sigma M)$  für alle  $q$ . Der 2. Teil des Sobolev'schen Einbettungssatzes, d.h. Satz 1.49, impliziert dann  $\Theta \in C^{0,\alpha}(M, \Sigma M)$  für alle  $\alpha \in (0, 1)$ .

#### 5.4.10. Mannigfaltigkeiten mit endlicher Spin-Überlagerung

**Satz 5.39 (PMT für kompakte Mannigfaltigkeiten mit Spin-Überlagerung).** Sei  $(M, g)$  eine geschlossene riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  mit  $\lambda(M, [g]) > 0$ . Sei  $x_0 \in M$ . Ferner sei  $n \in \{3, 4, 5\}$  oder sei  $(M, g)$  konform flach nahe  $x_0$ . Wir definieren  $A \in \mathbb{R}$  wie in Proposition 5.3. Dann gilt  $A \geq 0$ . Haben wir  $A = 0$ , so ist  $(M, g)$  konform zur Standard-Sphäre  $\mathbb{S}^n$ .

!! kommt noch!!!

**Folgerung 5.40.** Sei  $(M, g)$  eine asymptotisch euklidische Mannigfaltigkeiten mit nicht-negativer Skalarkrümmung. Wir nehmen an, dass  $M$  eine endliche Überlagerung besitzt, die spin ist. Dann ist die ADM-Masse von  $(M, g)$  nicht-negativ.

## 6. Ergänzungen, Erweiterungen, alternative Beweise

### 6.1. Die Sobolev-Konstante

Sei  $p_c = 2n/(n-2)$ . Die Sobolev-Konstante  $\sigma_n$  hatten wir in Definition 1.7 definiert als

$$\sigma_n := \sup_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2}{\|\nabla u\|_{L^2}^2}.$$

In (3.2) haben wir gezeigt:

$$\sigma_n = \frac{a}{\lambda(\mathbb{S}^n)} = \frac{4(n-1)}{n-2} \cdot \frac{1}{\lambda(\mathbb{S}^n)}.$$

Aus Abschnitt 3.8, genauer aus Folgerung 3.24 erhalten wir nun:

**Folgerung 6.1.**

$$\sigma_n = \frac{4}{n(n-2)} \omega_n^{-2/n}.$$

**Bemerkung 6.2.** In der Ungleichung  $\|\varphi\|_{L^{p_c}}^2 \leq \sigma_n \cdot \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$  gilt für die Funktionen  $\varphi = u_\alpha$  also Gleichheit.

*Beweis.* Sei wieder  $\delta_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\delta_\alpha(x) := \alpha \cdot x$  die Dilatation um  $\alpha > 0$  und  $\sigma : S^n \setminus \{e_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die stereografische Projektion. Wie in Beispiel 2.33 definieren wir  $\Psi \in \text{Conf}(\mathbb{S}^n)$  durch  $\Psi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ ,  $\Psi(e_0) = e_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sigma_n} &= \lambda(\mathbb{S}^n) \\ &= Q(g_{\text{sph}}) \\ &= Q(\Psi^* g_{\text{sph}}) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} Q^{g_{\text{sph}}} \left( \frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} Q^{g_{\text{eukl}}} \left( u_1 \cdot \frac{u_\alpha}{u_1} \right) \\ &\stackrel{(+)}{=} Q^{g_{\text{eukl}}} (u_\alpha) \end{aligned}$$

$$= a \cdot \frac{\|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2}{\|u_\alpha\|_{L^{p_c}}^2}.$$

Hierbei ist  $(*)$  zum Beispiel auch wieder durch (2.19) mit  $\alpha := 1$  gegeben und  $(+)$  ist eine zu (3.1) analoge Rechnung.

## 6.2. Eindeutigkeit der Lösung des Yamabe-Problems?

Sei  $g$  eine Yamabe-Metrik auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$ ,  $\dim M \geq 3$ . Im Fall  $\lambda(M, [g]) \leq 0$  gibt es dann in dieser konformen Klasse genau eine Metrik mit konstanter Skalarkrümmung mit Volumen 1, nämlich die (reskalierte) Yamabe-Metrik, siehe Aufgabe 4 auf Übungsblatt 10.

Im Fall  $\lambda(M, [g]) > 0$  ist die Eindeutigkeitsaussage im allgemeinen nicht mehr gültig. Es gibt Beispiele mit nicht eindeutiger Yamabe-Metrik und auch Beispiele, bei denen es neben den Yamabe-Metriken noch weitere Metriken konstanter Skalarkrümmung gibt. (Siehe Aufgabe 4 c) auf Übungsblatt 13 für ein Beispiel der zweiten Art.)

Den Raum aller Metriken mit positiver Skalarkrümmung in einer fixen konformen Klasse zu studieren, ist interessant aber herausfordernd. (Kompaktheits- und Nicht-Kompaktheits-Resultate von Brendle und Brendle/Marques.)

Wir zeigen nun einen Satz, der eine weitere Eindeutigkeitsaussage macht. Wie der Satz 2.31 von Obata wurde er auch in einer Artikelserie von Obata in den 1970er Jahren gezeigt. Der entscheidende Erkenntnisgewinn des hier dargestellten Satz im Vergleich zu Satz 2.31 wurde aber bereits von Brinkmann [20] gezeigt, siehe auch [39].

**Satz 6.3 (Satz von Brinkmann-Obata).** *Sei  $M$  eine geschlossene zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $g_0$  eine Einstein-Metrik auf  $M$ . Dann gilt entweder*

- (a) *Ist  $g \in [g_0]$  eine Metrik konstanter Skalarkrümmung, dann gibt es eine Konstante  $c > 0$  mit  $g = cg_0$ .*

*Oder:*

- (b) *Es gibt eine Konstante  $\varrho > 0$ , so dass  $(M, g_0)$  isometrisch zu  $(S^n, \varrho^2 g_{\text{sph}})$  ist.*

<sup>1</sup>

Im Fall (b) beschreibt dann der erste Satz 2.31 von Obata die Menge aller Metriken konstanter Skalarkrümmung in  $[g_0]$ . Insbesondere ist wegen Satz 2.31 klar, dass (a) und (b) nicht gleichzeitig wahr sein können.

*Beweis.*

Wir nehmen an, dass  $g \in [g_0]$  konstante Skalarkrümmung hat.

<sup>1</sup>Einfügen: Dies ist bewiesen als Prop. 6.2 in Obata, Morio The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. J. Differential Geometry 6 (1971/72), 247–258.

- (i) Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\text{scal}^g = n(n-1)$ .  
Denn: Falls  $\text{scal}^g \leq 0$  gilt, so wissen wir bereits, dass Aussage a) gilt. Wenn  $\text{scal}^g > 0$  gilt so definieren wir

$$\bar{g} := \frac{\text{scal}^g}{n(n-1)}g.$$

Die Metrik  $\bar{g} \in [g_0]$  hat dann konstante Skalarkrümmung  $\text{scal}^{\bar{g}} = n(n-1)$ .

- (ii) Wir schreiben wie im Beweis von Lemma 2.29

$$g = \varphi^2 \cdot g_0 \quad \varphi \in C^\infty(M), \quad \varphi > 0.$$

Wir haben dort gezeigt, dass  $g$  ebenfalls eine Einsteinmetrik ist, also  $B^g = B^{g_0} = 0$ .  
Hieraus folgt dann mit (2.16)

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{n}(\Delta \varphi) \cdot g = 0, \quad (6.1)$$

wobei  $\nabla$  und  $\Delta$  bezüglich  $g$  zu nehmen sind. Die Aussage des Satzes folgt nun aus der folgenden Proposition.  $\square$

Notation: Für einen symmetrischen  $(0,2)$ -Tensor  $h$  sei  $h_0$  der spurfreie Anteil von  $h$ , also  $h_0 := h - \frac{1}{n}(\text{tr} h)g$ . Zum Beispiel ist  $B^g = (\text{ric}^g)_0$ . Gleichung (6.1) wird mit dieser Notation zu

$$(\nabla^2 \varphi)_0 = 0.$$

**Satz 6.4 (Starrheitssatz von Obata).** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{scal}^g = n(n-1)$ . Für eine nicht-konstante Funktion  $\varphi \in C^\infty(M)$  gelte  $(\nabla^2 \varphi)_0 = 0$ . Dann gilt:*

(a)  $(M, g)$  ist isometrisch zu  $(S^n, g_{\text{sph}})$ .

(b) Sei  $x_0$  ein Maximum von  $\varphi$ . Dann haben wir

$$\varphi(x) := \varphi(x_0) \cos(d(x, x_0)).$$

Der Beweis des Starrheitssatzes bedarf einiger Vorbereitungen.

**Historische Bemerkung:** In [Wu, Ye, Arxiv 1203.5307] wird die Gleichung  $(\nabla^2 \varphi)_0 = 0$  die verallgemeinerte Obata-Gleichung genannt. Die Autoren zeigen insbesondere den oben formulierten Starrheitssatz und behaupten, dies sei eine *Verallgemeinerung* von Obatas Resultaten. Der Starrheitssatz ist aus Sicht von Bernd Ammann eine Konsequenz aus Obatas Rechnungen und naheliegenden differentialgeometrischen Rechnungen, die sich aus der Verifikation von Obatas Formeln ergeben. (Ein Beweis hat zum Beispiel Bernd Ammann im Wintersemester 2010/11 in einer Vorlesung geführt, also vor obigem

Preprint). Es ist aber auch anzumerken, dass die Originalarbeiten von Obata zum Beweis der uns interessierenden Aussagen nicht sehr effektiv geordnet ist. Es sind also nicht alle Mathematiker der Meinung, dass der Satz bereits Obata zugeschrieben werden sollte.

**Wiederholung aus der Differentialgeometrie:** Für  $h \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$  und  $X \in \Gamma(TM)$  definieren wir die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_X h$  durch die Formel

$$(\mathcal{L}_X h)(Y, Z) = \partial_X(h(Y, Z)) - h([X, Y], Z) - h(Y, [X, Z]), \forall Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Man überprüft, dass hierdurch  $\mathcal{L}_X h \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$  wohldefiniert ist.

**Lemma 6.5.** *Sei  $(M, g)$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit und sei  $f_t : M \rightarrow M$  der Fluss von  $X$ , das heißt es gelte  $f_0 = \text{id}$  und für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $p \in M$  gelte*

$$\frac{d}{dt} f_t(p) = X|_{f_t(p)}.$$

- (a) *Es gilt  $f_t^* g = g$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn  $\mathcal{L}_X g = 0$ . In diesem Fall nennt man  $X$  ein **Killing-Vektorfeld**.*
- (b) *Es gilt  $f_t^* g \in [g]$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn  $(\mathcal{L}_X g)_0 = 0$ . In diesem Fall nennt man  $X$  ein **konformes Killing-Vektorfeld**.*

Der Beweis dieser differentialgeometrischen Standardaussage wird hier nicht ausgeführt. Eine Einführung zu Lie-Ableitungen findet sich zum Beispiel in [43, Kapitel 18]. Hieraus kann man dann die obigen Aussagen herleiten.

Man rechnet nun für Vektorfelder  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \end{aligned}$$

**Lemma 6.6.** *Es gelte  $(\nabla^2 \varphi)_0 = 0$  auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist  $\text{grad } \varphi$  ein konformes Killing-Vektorfeld.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\text{grad } \varphi} g)(Y, Z) &= g(\nabla_Y \text{grad } \varphi, Z) + g(Y, \nabla_Z \text{grad } \varphi) \\ &= \langle \nabla_Y d\varphi, Z \rangle + \langle \nabla_Z d\varphi, Y \rangle \\ &= \nabla^2 \varphi(Y, Z) + \nabla^2 \varphi(Z, Y) = 2\nabla^2 \varphi(Y, Z) \end{aligned}$$



es folgt  $\mathcal{L}_{\text{grad } \varphi} g = 2\nabla^2 \varphi$  und somit  $(\mathcal{L}_{\text{grad } \varphi} g)_0 = 2(\nabla^2 \varphi)_0 = 0$ .  $\square$

**Lemma 6.7.** *Sei  $X$  ein konformes Killing-Vektorfeld auf einer  $n$ -dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit mit  $\text{scal} = n(n-1)\kappa$  für eine Konstante  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\Delta \text{div } X = n\kappa \text{div } X$ .*

Wir nutzen hierbei die Definition  $\text{div } X := \text{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X)$ .

*Beweis.*

Im Sinne einer einfacheren Darstellung beschränken wir uns auf den Fall, dass  $M$  kompakt ist. Wenn  $M$  kompakt ist, so ist der Fluss  $f_t; M \rightarrow M$  von  $X$  wohldefiniert.<sup>2</sup> Aufgrund von  $f_t \in \text{Conf}(M, [g])$  finden wir positive Funktionen  $\varrho_t \in \mathcal{C}^\infty(M)$  mit

$$f_t^* g = \varrho_t^{4/(n-2)} g,$$

und offensichtlich gilt  $\varrho_0 \equiv 1$ . Hieraus folgt

$$f_t^*(\text{dvol}^g) = \text{dvol}^{f_t^* g} = \varrho_t^p \text{dvol}^g.$$

Die Divergenz eines Vektorfelds ist die infinitesimale Volumenänderung entlang des Flusses, oder mathematisch präzise ausgedrückt:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f_t^*(\text{dvol}^g)) = \text{div } X \text{ dvol}^g.$$

Dies ergibt

$$\text{div } X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varrho_t^p) = p \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varrho_t.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} a \text{scal}^g \circ f_t &= a \text{scal}^{f_t^* g} \\ &= a \text{scal}^{\varrho_t^{4/(n-2)} g} \\ &= Y^{\varrho_t^{4/(n-2)} g}(1) \\ &= \varrho_t^{1-p_c} Y^g(\varrho_t) \\ &= \varrho_t^{1-p_c} \Delta^g(\varrho_t) + \varrho_t^{2-p_c} a \text{scal}^g. \end{aligned}$$

Wir leiten nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$  ab und erhalten unter Nutzung von  $\varrho_0 = 1$ , von  $\Delta^g \varrho_0 = \Delta^g 1 = 0$  und der Konstantheit von  $\text{scal} = n(n-1)\kappa$ :

$$0 = \Delta^g \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varrho_t \right) + (2 - p_c) \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varrho_t \right) a \text{scal}^g$$

<sup>2</sup>Die Aussage kann man in voller Allgemeinheit ähnlich zeigen, mit einem Fluss  $f_t(x)$  für  $(x, t)$  in einer Umgebung von  $M \times \{0\}$  in  $M \times \mathbb{R}$  definiert ist.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} [\Delta^g (\operatorname{div} X) - (p_c - 2)a \operatorname{scal}^g \operatorname{div} X] \\
&= \frac{1}{p} [\Delta^g (\operatorname{div} X) - n\kappa \operatorname{div} X] .
\end{aligned}$$

□

**Lemma 6.8.** *Wir nehmen die Voraussetzungen des Starrheitssatzes 6.4 an. Dann gibt es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $\tilde{\varphi} := \varphi - c$  erfüllt:*

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi} \cdot g .$$

*Beweis.*

Es gilt für  $X := \operatorname{grad} \varphi$

$$\operatorname{div} X = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi .$$

Da  $X$  ein konformes Killing-Vektorfeld ist, bekommen wir aus Lemma 6.7 die Gleichung  $\Delta \operatorname{div} X = n \operatorname{div} X$ , also

$$\Delta \left( \frac{1}{n} \Delta \varphi - \varphi \right) = 0 ,$$

und deswegen ist  $c := \frac{1}{n} \Delta \varphi - \varphi$  konstant.

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} = \underbrace{(\nabla^2 \tilde{\varphi})_0}_{=0} + \underbrace{\operatorname{tr}(\nabla^2 \tilde{\varphi})}_{=-\Delta \tilde{\varphi} = -n\tilde{\varphi}} \frac{1}{n} g = -\tilde{\varphi} g .$$

□

*Beweis des Starrheitssatzes.* <sup>3</sup> Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass

$$\nabla^2 \varphi = -\varphi g .$$

Sei  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Dann gilt

$$\begin{aligned}
-\varphi(\gamma(t)) &= -\varphi(\gamma(t)) g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \\
&= (\nabla^2 \varphi)(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \\
&= \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \varphi - \underbrace{\nabla_{\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t)} \varphi}_{=0} \\
&= \frac{d^2}{dt^2} (\varphi \circ \gamma)
\end{aligned}$$

Also  $\varphi \circ \gamma(t) = A_\gamma \cos t + B_\gamma \sin t$ . Da  $\varphi \not\equiv 0$  sehen wir damit, dass die Nullstellenmenge von  $\varphi$  eine Nullmenge ist.

<sup>3</sup>Dieser Beweis ist teilweise an [18, III.D.I.6] angelehnt, wo ein anderer Satz von Obata gezeigt wird.

Wir nehmen nun an, dass  $\varphi$  sein Maximum in  $x_0 \in M$  annimmt. Indem wir radialen Geodätischen folgen, die in  $x_0$  starten,  $A := \max \varphi = \varphi(x_0)$ , sehen wir dann

$$\varphi(x) = A \cos(d(x, x_0))$$

für alle  $x \in M$  Mit  $r(x) = d(x, x_0)$  erhalten überall dort, wo  $r$  differenzierbar ist  $d\varphi = -A \sin r \, dr$  und damit dann

$$-\varphi g = -A \cos r \, dr \otimes dr - A \sin r \, \nabla^2 r.$$

Es folgt dann außerhalb der Nullstellenmenge von  $\varphi$

$$g = dr \otimes dr + \tan r \, \nabla^2 r. \quad (6.2)$$

Nun ist  $\nabla r$  aufgrund des Gauß Lemmas ein Einheitsnormalenfeld auf  $S_\varrho := \{x \in M \mid r(x) = \varrho\}$  und folglich ist die Einschränkung von  $-\nabla^2 r$  auf  $S_\varrho$  die zweite Fundamentalform  $\Pi$  von  $S_\varrho$ . Wir schreiben in sphärischen Normalkoordinaten

$$g = dr \otimes dr + h_r$$

und es gilt in solchen Koordinaten [14]

$$\frac{d}{dr} h_r = -2\Pi, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} h_r = g_{\text{sph}}^{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Durch Vergleich mit (6.2) bekommen wir auch  $h_r = -\tan r \, \Pi$ . Dies ergibt insgesamt

$$\frac{d}{dr} h_r = 2 \cot r \, h_r, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} h_r = g_{\text{sph}}^{\mathbb{S}^{n-1}},$$

und hiervon ist die einzige Lösung  $h_r = (\sin r)^2 g_{\text{sph}}^{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Die Metrik ist also lokal isometrisch zu  $\mathbb{S}^n$ , hat also Schnittkrümmung 1 überall wo  $r$  differenzierbar ist und  $\varphi$  nicht verschwindet. Die Funktion ist aber nur in einer Nullmenge nicht differenzierbar, genauer: in  $x_0$  und im Schnittpunkt (englisch: cut locus) von  $x_0$ , siehe zum Beispiel [24, Chap. 13, Sec. 2]. Also ist die Schnittkrümmung konstant 1. Falls  $M$  einfach zusammenhängend ist, so ist der Satz also gezeigt.

Sei also nun  $M$  nicht einfach zusammenhängend. Dann sei  $\tilde{M}$  die universelle Überlagerung und  $\psi : \tilde{M} \rightarrow M$  die zugehörige Überlagerungsabbildung. Wir wenden den Starrheitssatz auf  $\tilde{M}$  mit der zurückgezogenen Metrik  $\tilde{g} := \psi^* g$  und der zurückgezogenen Funktion  $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \psi$  an. Man sieht dann, dass  $\tilde{\varphi}$  das Maximum in nur einem Punkt annimmt. Wir erhalten die widersprüchliche Aussage, dass  $\psi$  ein Diffeomorphismus ist.  $\square$

**Bemerkung 6.9.** Wie oben angedeutet, ist die obige Starrheitsaussage auch für einen anderen wichtigen Satz von Obata sehr wichtig, siehe [18, III.D.I.6]. Licherowicz konnte zeigen, dass der erste positive Eigenwert  $\lambda_1$  des Laplace-Beltrami-Operators auf einer geschlossenen riemannschen Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq \kappa(n-1)g$  die Ungleichung  $\lambda_1 \geq n\kappa$  erfüllt.

Obata zeigte nun: wird die Gleichheit in der Ungleichung angenommen, so ist jede Zusammenhangskomponente von  $M$  isometrisch zu  $(\mathbb{S}^n, \varrho^2 g_{\text{sph}})$  für ein  $\varrho > 0$ . Ein wichtiger Schritt im Beweis ist zu zeigen, dass im Falle der Gleichheit die zugehörige Eigenfunktion  $\varphi$  die Gleichung  $\nabla^2 \varphi = -\varphi g$  erfüllt.

### 6.3. Der erste Eigenraum des Operators $\Delta + h$

Wir zeigen hier:

**Proposition 6.10.** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Sei  $\lambda$  der kleinste Eigenwert von  $L := a\Delta^g + h$ . Dann ist der zugehörige Eigenraum 1-dimensional und wird von einer positiven glatten Funktion aufgespannt.*

Beweis kommt noch.

### 6.4. Die Green'sche Funktion von $\not{D}$ auf $\mathbb{R}^n$

Wir wollen nun noch die Green'sche Funktion des Dirac-Operators auf dem euklidischen Raum bestimmen. Dies wird im obigen Beweis nicht benötigt, erscheint uns aber hilfreich, damit es glaubhaft erscheint, wieso die oben definierte Funktion  $\Gamma_\Phi$  die Green-Funktion ergibt.<sup>4</sup>

Wir definieren

$$\begin{aligned} \Gamma_{\not{D}}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \text{End}(\Sigma_n) \\ x &\mapsto \left( \vartheta \mapsto \Gamma_{\not{D}}(x) \cdot \vartheta := -\frac{x}{\omega_{n-1}r^n} \cdot \vartheta \right). \end{aligned}$$

Man prüft leicht  $\Gamma_{\not{D}} \cdot \vartheta \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  nach. Dies bewirkt, dass  $\Gamma_{\not{D}} \cdot \vartheta$  einen distributionellen Schnitt von  $\Sigma\mathbb{R}^n$  definiert.

**Lemma 6.11.**  *$\Gamma_{\not{D}}$  ist die Green-Funktion des Dirac-Operators, das heißt im Sinne von Distributionen gilt*

$$\not{D}(\Gamma_{\not{D}} \cdot \vartheta) = \delta_0 \cdot \vartheta.$$

*Beweis.*

Zu zeigen ist: für jede kompakt getragene glatte Abbildung  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma_n$  und jedes  $\vartheta \in \Sigma_n$  gilt

$$\langle \vartheta, \psi(0) \rangle = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \langle \Gamma_{\not{D}} \cdot \vartheta, \not{D}\psi(x) \rangle dx.$$

Wir rechnen zunächst, dass  $\not{D}(\Gamma_{\not{D}} \cdot \vartheta) = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dann integrieren wir partiell, wobei  $\nu = -x/r$  das aus der Menge  $\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)$  herauszeigende Einheitsnormalenvektorfeld des Randes ist:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \langle \Gamma_{\not{D}} \cdot \vartheta, \not{D}\psi(x) \rangle dx$$

<sup>4</sup>Dass  $\Gamma_\Phi$  dann tatsächlich die Green-Funktion ist, müsste eigentlich auch noch im Detail gezeigt werden!

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \langle \mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{D}} \cdot \vartheta), \psi(x) \rangle dx - \int_{S_\varrho(0)} \langle \nu \cdot \Gamma_{\mathcal{D}} \cdot \vartheta, \psi(x) \rangle d\text{vol}_{n-1} \\
&= -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_\varrho(0)} \left\langle \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r^n} \cdot \vartheta, \psi(x) \right\rangle d\text{vol}_{n-1} \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle \vartheta, \psi(\varrho x) \rangle d\text{vol}_{n-1} \rightarrow \langle \vartheta, \psi(0) \rangle
\end{aligned}$$

für  $\varrho \rightarrow 0$ . □

## 6.5. Homogene Polynome

Sei wieder  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) := \{\text{reelle Polynome auf } \mathbb{R}^n, \text{ homogen vom Grad } m\}$ .

**Lemma 6.12.** Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \binom{n+m-1}{m}.$$

*Beweis.*

Offensichtlich bilden die Polynome

$$\prod_{i=1}^n (x^i)^{k_i}$$

mit  $k_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $k_1 + \dots + k_n = m$  eine Basis von  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ . Wir müssen also zählen, wieviele Möglichkeiten es für die Wahl der  $k_i$  gibt. Es ist also das Ergebnis der kombinatorischen Formel für die Verteilung von  $m$  ununterscheidbaren Bällen auf  $n$  markierte Körbe. Obiges Polynom entspricht dem Fall, dass  $k_i$  Bälle im  $i$ -ten Korb sind.

Wir definieren nun für  $j = 0, \dots, n$  die Zahlen  $p_j := \sum_{i=1}^j (k_i + 1)$ , und offensichtlich gilt  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_{n-1} < p_n = m + n$ . Die Menge  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  ist also eine  $(n-1)$ -elementige Teilmenge von  $\{1, 2, \dots, m+n-1\}$  und man prüft leicht, dass jede  $(n-1)$ -elementige Teilmenge hierdurch genau einmal erhalten wird. Die Dimension von  $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$  ist also gleich der Anzahl solcher Teilmengen und dies ist bekanntlich

$$\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}.$$

□

## 6.6. Alternative Beweise

### 6.6.1. Alternativer Beweis von Satz 5.13

In diesem Unterabschnitt wollen wir einen alternativen Beweis von Satz 5.13 beschreiben.  
– Kommt noch –

# A. Riemannsche Geometrie

Im folgenden wollen wir keine umfassende Einführung in die riemannsche Geometrie geben, sondern nur eine kurze Einführung in die wichtigsten Begriffe. Viele Beweise werden ausgelassen und auf andere Quellen verwiesen. Umfassendere Einführungen sind die Bücher von do Carmo [24] und Ballmann [15]. Weitere Quellen sind die Skripte [2] und [13] sowie zusätzliche Literatur auf der [Homepage der Vorlesung](#).

## A.1. Mannigfaltigkeiten

### A.1.1. Atlanten und glatte Strukturen

Eine  $m$ -dimensionale *Mannigfaltigkeit* ist definiert als ein parakompakter<sup>1</sup> Hausdorff-Raum  $M$  mit einem maximalen Atlas

$$\mathcal{A} = \{U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha \mid \alpha \in A\}.$$

Die Elemente eines Atlas sind *Karten*

$$U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha,$$

wobei  $U_\alpha$  bzw.  $V_\alpha$  eine offene Teilmenge von  $M$  bzw. von  $\mathbb{R}^m$  ist, kurz  $U_\alpha \subseteq M$  bzw.  $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ , und  $\varphi_\alpha$  ist ein Homöomorphismus. Die gesamte Karte schreiben wir dann oft als

$$M \supset U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Solch eine Menge  $\mathcal{A}$  von Karten nennt man einen *Atlas*, falls gilt:

(1)  $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

(2) alle Kartenwechsel sind glatt, das heißt für alle  $\alpha, \beta \in A$  ist

$$(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}) \circ (\varphi_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta})^{-1}$$

eine glatte Abbildung von  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\beta \subseteq \mathbb{R}^m$  nach  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ .

---

<sup>1</sup>Ein topologischer Raum heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt, siehe in [15, Abschn. 2.1] für Details, äquivalente Aussagen und Konsequenzen. In unserem Zusammenhang ist die Parakompaktheit dazu äquivalent, dass jede Zusammenhangskomponente eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Man kann zeigen: jeder metrische Raum ist parakompakt.

Besitzt ein parakompakter Hausdorffraum  $M$  einen Atlas, so ist dieser im allgemeinen nicht eindeutig<sup>2</sup>. Auf der Menge aller Atlanten auf  $M$  definiert  $\subset$  eine partielle Ordnung. Man nennt  $\mathcal{A}$  *maximal*, falls für jeden Atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  die Implikation

$$\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}} \implies \mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$$

wahr ist.

Bild mit einer Fläche, zwei Karten und einem Kartenwechsel

Die Umkehrabbildungen der Karten nennt man *lokale Parametrisierungen*.

**Übung A.1.** Sei  $\mathcal{A}$  ein Atlas auf dem Hausdorffraum  $M$ . Dann gibt es genau einen maximalen Atlas  $\mathcal{A}_{\max}$  mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$ .

Wir sagen dann:  $\mathcal{A}$  ist ein Atlas der Mannigfaltigkeit  $(M, \mathcal{A}_{\max})$  und wir schreiben zu meist einfach  $M$  für  $(M, \mathcal{A}_{\max})$ . Man nennt einen maximalen Atlas auf  $M$  auch eine *glatte Struktur* auf  $M$ .

**Beispiel A.1.** (1) Untermannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten.

(2) Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine glatte Abbildung und ist  $z$  ein regulärer Wert von  $f$ , so ist  $f^{-1}(z)$  eine (Unter-)Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - k$ . Der Satz über implizite Funktionen liefert die Existenz eines Atlanten.

(3) Die *Sphäre*

$$S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$$

ist eine  $m$ -dimensionale (Unter-)Mannigfaltigkeit.

(4) In den Übungen konstruieren wir einen Atlas auf dem *reell-projektiven Raum*

$$\mathbb{R}P^n = \{\{x, -x\} \mid x \in S^n\}.$$

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts seien  $M$  und  $Q$  Mannigfaltigkeiten mit Atlanten  $\mathcal{A}^M$  und  $\mathcal{A}^Q$  und sei  $f : M \rightarrow Q$  eine Abbildung.

**Definition A.2 (Glatte Abbildungen).** Eine stetige Abbildung  $f : M \rightarrow Q$  heißt *glatt*, falls für alle  $(U \xrightarrow{\varphi} V) \in \mathcal{A}^M$  und alle  $(\tilde{U} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \tilde{V}) \in \mathcal{A}^Q$  die Komposition

$$\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \tilde{V}$$

glatt ist.

Man überlegt sich leicht, dass die Definition der Glattheit nur von der glatten Struktur auf  $M$  und  $Q$ , aber nicht von den verwendeten Atlanten abhängt.

---

<sup>2</sup>eindeutig ist er nur für 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten und im Fall  $M = \emptyset$



Bild mit zwei Mannigfaltigkeiten und einer Abbildung, die in Karten ausgedrückt wird

Wir schreiben  $\mathcal{C}^\infty(M, Q)$  für den Raum aller glatten Abbildungen von  $M$  nach  $Q$ , und schreiben kurz  $\mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ .

**Bemerkung A.3.** Sind  $M$  bzw.  $Q$  Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^k$ , dann ist eine Abbildung  $f : M \rightarrow Q$  genau dann glatt, wenn es zu jedem Punkt  $x \in M$  eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $U \ni x$  und eine glatte<sup>3</sup> Abbildung  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  gibt, so dass

$$f|_{U \cap M} = \tilde{f}|_{U \cap M}.$$

Ist nun  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so kann man für jedes  $x \in M$  den *Tangentialraum*  $T_x M$  und das *Tangentialbündel*  $TM := \coprod_{x \in M} T_x M$  definieren. Die zugehörige *Bündelprojektion* ist die Abbildung  $\pi : TM \rightarrow M$ , die  $X \in T_x M$  auf  $x$  abbildet.

Ist eine Abbildung  $f : M \rightarrow Q$  glatt, dann kann man  $f$  in  $x \in M$  differenzieren und erhält als Ableitung eine lineare Abbildung  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} Q$ . Dies ergibt eine Abbildung  $df : TM \rightarrow TQ$ , siehe Übungen und Zentralübung.

Ist  $Q = V$  ein Vektorraum (über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) dann wird zumeist  $T_q V$  mit  $V$  identifiziert. Mit dieser Identifikation erhalten wir dann  $df : TM \rightarrow V$ . Dies ist insbesondere im Fall  $Q = V = \mathbb{R}$  wichtig. Dann ist  $f$  eine glatte Funktion<sup>4</sup>  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , und für alle  $x \in M$  ist  $df_x \in \text{Hom}(T_x M, \mathbb{R}) =: (T_x M)^* =: T_x^* M$ . Also ist  $df : M \rightarrow T^* M := \coprod_{x \in M} T_x^* M$  mit  $df_x \in T_x^* M$ , also ein Schnitt von  $\Gamma(T^* M)$ . In der Sprache der Differentialformen (siehe Bücher zur Differentialtopologie wie zum Beispiel [15] und siehe Abschnitt A.1.3) ist somit  $df$  eine 1-Form, denn  $\bigwedge^1 T_x^* M = T_x^* M$ .

**Definition A.4 (Diffeomorphismen).** Eine Abbildung  $f : M \rightarrow Q$  ist ein *Diffeomorphismus*, falls  $f$  glatt ist und es eine glatte Abbildung  $F : Q \rightarrow M$  gibt, so dass  $F \circ f = \text{id}_M$  und  $f \circ F = \text{id}_Q$ . Für die *Umkehrfunktion*  $F$  schreiben wir dann  $f^{-1} := F$ .

Ist  $f$  ein Diffeomorphismus, so ist  $df_x$  für jedes  $x \in M$  ein Vektorraumisomorphismus von  $T_x M$  nach  $T_x Q$ , insbesondere gilt dann  $m = \dim M = q = \dim Q$ .

### A.1.2. Vektorfelder

Im folgenden sei  $M$  immer eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Definition A.5 (Vektorfelder).** Ein *Vektorfeld* auf  $M$  ist eine glatte Abbildung

$$Y : M \rightarrow TM = \coprod_{x \in M} T_x M,$$

die  $Y(x) \in T_x M$  für alle  $x \in M$  erfüllt. Wir schreiben normalerweise  $Y|_x$  anstelle von  $Y(x)$ . Die Menge aller Vektorfelder auf  $M$  schreiben wir als  $\Gamma(TM)$ , es ist die Menge aller Schnitte des Vektorbündels  $TM \rightarrow M$ .

<sup>3</sup>das heißt hier: glatt im Sinne der Analysis II

<sup>4</sup>Die Begriffe „Abbildungen“ und „Funktion“ werden nahezu synonym verwendet, der Unterschied ist, dass die Zielmenge von einer Funktion normalerweise  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist, wohingegen die Zielmenge von einer Abbildungen beliebig sein kann. Dies wird aber weder in der Literatur noch in unserer Vorlesung in dieser Form konsequent verwendet, es gibt immer wieder Abweichungen.

**Beispiel A.6.** Die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} := \frac{\partial(\varphi^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi : U \rightarrow TU \subset TM$$

ist ein Vektorfeld auf  $U$ , genannt das *i-te Koordinatenfeld*. Ein Vektorfeld  $Y$  operiert auf einer Funktion  $f$  durch Ableitung oder — äquivalent formuliert — als Derivation, notiert als  $\partial_Y f = df(Y)$ . Für eine auf  $U$  definierte glatte Funktion  $f$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^i} f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}. \quad (\text{A.1})$$

Wenn man nun Punkte  $x$  von  $U \subset M$  mit  $\varphi(x) \in V \subset \mathbb{R}^m$  identifizieren würde, dann wäre  $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$  gleich der  $i$ -ten partiellen Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Man beachten dass  $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^m}|_x$  eine Basis von  $T_x M$  ist.

**Bemerkung A.7.** Für Untermannigfaltigkeiten  $M$  von  $\mathbb{R}^n$  ist jeder Tangentialraum  $T_x M$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ . Wir können somit ein Vektorfeld  $Y$  auch als eine Abbildung  $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ansehen. Die Abbildung  $Y$  ist glatt in dem oben benutzten Sinn, genau dann, wenn es eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  und eine glatte Abbildung  $\tilde{Y} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, so dass  $M \subset U$  und so dass  $\tilde{Y}$  eine Fortsetzung von  $Y$  ist.

### A.1.3. Tensoren

Wir wollen nun kurz auf Tensoren eingehen, für weitere Informationen verweisen wir auf [60] oder [2, Abschnitt 2.6]. Historisch geht die Verwendung von Tensoren in der Mathematik auf den Spannungstensor zurück, der zuerst in der Elastizitätstheorie und dann in der Elektrodynamik genutzt wurde, auch wenn James C. Maxwell in der Mitte des 19. Jahrhunderts wohl zunächst einen anderen Begriff für das dort eingeführte mathematische Konzept der Tensoren benutzte. Das Konzept des Tensors und auch der Begriff „Tensor“ wurden dann zu Ende des 19. Jahrhunderts zu einem wichtigen Hilfsmittel der riemannschen Geometrie, um die hier auftretende wichtige multilineare Algebra systematisch zu beschreiben. Die Konstruktion von Tensoren im hier benötigten Sinn besteht aus zwei Teilen. Zunächst der algebraischen Konstruktion des Tensor-Produkts. Eine Definition, die auch in vielen anderen Feldern der Mathematik wichtig wurde. Wir benötigen in dieser Vorlesung nur das algebraische Tensor-Produkt von endlich-dimensionalen reellen (und manchmal auch komplexen) Vektorräumen, eine kurze Zusammenfassung der benötigten Konstruktionen findet man in diesem Skript: [3].

In einem zweiten Schritt wird diese algebraische Definition für jeden Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit durchgeführt und wir erhalten die unten definierten Tensorbündel  $T^{(r,s)} M \rightarrow M$ . Wenn in Anwendungen wie der Elastizitätstheorie, der Elektrodynamik oder der allgemeinen Relativitätstheorie von Tensoren geredet wird, so sind hiermit die Schnitte des Tensorbündels gemeint.

Sei  $M^m$  wieder eine glatte Mannigfaltigkeit.

**Definition A.8.** Für  $x \in M$  setze

$$T_x^{r,s}M := \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes \dots \otimes T_xM}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes \dots \otimes T_x^*M}_{s\text{-mal}}.$$

und  $T_x^{0,0} := \mathbb{R}$ .

Ein Element aus  $T_x^{r,s}M$  heißt ein  $(r, s)$ -Tensor. In der Physik ist auch die Bezeichnung  $r$ -fach kontravarianter und  $s$ -fach kovarianter Tensor sehr verbreitet.

**Beispiel A.9.** (a)  $T_x^{1,0}M = T_xM$ .

(b)  $T_x^{0,2}M = T_x^*M \otimes T_x^*M \cong \text{Bilin}(T_xM \times T_xM, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(T_xM, T_x^*M)$ .

(c)  $T_x^{0,1}M = T_x^*M$ .

(d) Wir schreiben  $\text{Lin}_k(V_1, \dots, V_k; W)$  für den Raum der  $k$ -linearen Abbildungen

$$V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$$

Dann gibt es die folgenden kanonische Isomorphismen, die wir ab sofort zur Identifikation nutzen werden, mit  $n, k, u, v \in \mathbb{N}_0$  mit  $n + k = r$ ,  $u + v = s$ :

$$\begin{aligned} T_x^{r,s}M &= \text{Lin}_{r+s}(\underbrace{T_x^*M, T_x^*M, \dots, T_x^*M}_{r\text{-mal}}, \underbrace{T_xM, T_xM, \dots, T_xM}_{s\text{-mal}}; \mathbb{R}) \\ &= \text{Lin}_s(\underbrace{T_xM, T_xM, \dots, T_xM}_{s\text{-mal}}; \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes \dots \otimes T_xM}_{r\text{-mal}}) \\ &= \text{Hom}(T_x^{u,n}M; T_x^{k,v}M) \end{aligned}$$

und offensichtlich gibt es viele weitere Möglichkeiten.

**Definition A.10 (Tensor-Bündel).** Man bildet nun das  $(r, s)$ -Tensor-Bündel

$$T^{(r,s)}M := \coprod_{x \in M} T_x^{r,s}M.$$

Analog zur  $2m$ -dimensionalen glatten Struktur auf  $TM$  und auf  $T^*M$  definiert man auf  $T^{(r,s)}M$  eine glatte Struktur der Dimension  $m + m^{r+s}$ . Eine glatte Abbildungen  $A : M \rightarrow T^{(r,s)}M$  mit  $A|_x \in T_x^{r,s}M$  nennen wir *Schnitt von  $T^{(r,s)}M$*  oder einen *(physikalischen)  $(r, s)$ -Tensor*.

Insbesondere haben wir  $T_x^{0,k}M = \text{Lin}_k(\underbrace{T_xM, T_xM, \dots, T_xM}_{k\text{-mal}}; \mathbb{R})$ . Eine derartige multilineare Abbildung heißt *alternierend*, wenn das Vertauschen zweier Einträge einen Vorzeichenwechsel bewirkt.

**Definition A.11 (Alternierende Formen).** Wir definieren

$$\begin{aligned}\bigwedge^k T_x^* M &:= \{\alpha \in T_x^{0,k} M \mid \alpha \text{ ist alternierend}\}, \\ \bigwedge^* T_x^* M &:= \bigoplus_{k=0}^m \bigwedge^k T_x^* M \\ \bigwedge^\ell T^* M &:= \prod_{x \in M} \bigwedge^\ell T_x^* M \text{ für } \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{*\}\end{aligned}$$

Man nennt  $\bigwedge^* T_x^* M$  das *äußere oder alternierende Produkt* von  $T_x^* M$ ,  $\bigwedge^k T_x^* M$  das *k-fache alternierende Produkt* von  $T_x^* M$ , und  $\bigwedge^* T^* M \rightarrow M$  das Bündel der alternierenden Formen. Wir schreiben  $\Omega^\ell(M) = \Gamma(\bigwedge^\ell T^* M)$  für die Schnitte von  $\bigwedge^\ell T^* M \rightarrow M$ . Diese Schnitte werden *(alternierende) Differentialformen* genannt (siehe Analysis IV).

**Definition A.12 (Pullback von  $(0, s)$ -Tensoren).** Sei  $f : M \rightarrow Q$  eine glatte Abbildung und  $\alpha \in \Gamma(T^{(0,s)}Q)$ . Dann ist der *Pullback*  $f^* \alpha$  definiert durch

$$f^* \alpha(X_1, \dots, X_s) := \alpha(df(X_1), \dots, df(X_s)),$$

wobei  $x \in M$  und  $X_1, \dots, X_s \in T_x M$ .

**Bemerkung A.13 (Konvention zur zukünftigen Bezeichnung von Karten).**

Es ist oft üblich, dass man Karten mit  $x_\alpha$  oder einfach mit den Buchstaben  $x$  wählt, an Stelle von dem bisher verwendeten  $\varphi_\alpha$  und  $\varphi$ . Dies birgt zwar eine gewisse Verwechslungsgefahr, da  $x$  oft auch Punkte in  $M$  bezeichnet. Die Notation ist aber auch sehr praktisch, denn dann ist  $x$  eine Abbildung  $x : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$  und wir können nun  $x = (x^1, \dots, x^m)^T$  schreiben, und für  $\hat{x} \in U \subseteq M$  ist  $x^i(\hat{x})$  somit die  $i$ -te Koordinate von  $\hat{x}$ .

Benutzt man allerdings für die Karte den Buchstaben  $x$ , dann ist nicht mehr klar, ob  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  nun die  $i$ -te partielle Ableitung oder das  $i$ -te Koordinaten-Vektorfeld meint. Diese Unklarheit ist oft nicht unerwünscht, denn wie wir oben in (A.1) gesehen haben, stimmt die  $i$ -te partielle Ableitung mit dem  $i$ -ten Koordinaten-Vektorfeld überein, sobald wir die Punkte der Mannigfaltigkeit mit ihren Bildern in der Karte identifizieren.

Eine derartige Identifikation und die Verwendung des Buchstaben  $x$  für eine Karte ist sowohl in der frühen mathematischen Mannigfaltigkeitstheorie als auch bis heute in weiten Teilen der Physik, insbesondere der allgemeinen Relativitätstheorie die übliche Notation. Wenn man gelernt hat, wie man mit der potentiellen Mehrdeutigkeit umgeht, ist sie sehr effektiv.

Wir werden im Skript deswegen ab sofort zumeist Karten mit  $x$  bezeichnen, falls keine Verwechslung zu befürchten ist. Wenn es wichtig ist, zwischen Punkten  $x \in M$  und Karten zu unterscheiden, dann verwenden wir  $\varphi$  oder  $\varphi_\alpha$ .

Sei nun  $M \supset U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Karte,  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$  mit  $\varphi^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $d\varphi^i|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Übung A.2.** Zeigen Sie

$$d\varphi^i|_x \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) = \delta_i^j := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Insbesondere ist also  $(d\varphi^1|_x, \dots, d\varphi^m|_x)$  eine Basis von  $T_x^*M$ .

#### A.1.4. Levi-Civita-Zusammenhang und die Koszul-Formel

Die Koszul-Formel:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \quad (\text{A.2})$$

In Koordinaten ergibt sich

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (\text{A.3})$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \quad (\text{A.4})$$

## A.2. Die Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Im folgenden Abschnitt sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

### A.2.1. Kovariante Ableitung und zweite Fundamentalform

**Definition A.14 (Normalenbündel).** Wir definieren den *Normalenraum* von  $M$  in  $x \in M$  als

$$N_x M := T_x M^\perp := \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \langle Y, X \rangle = 0 \quad \forall X \in T_x M\}.$$

Das *Normalenbündel* ist

$$NM := \coprod_{x \in M} N_x M.$$

Die Orthogonalprojektionen bezeichnen wir mit  $\pi_x^{\text{tan}} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$  und  $\pi_x^{\text{nor}} : \mathbb{R}^n \rightarrow N_x M$ .

Sei  $Y \in \Gamma(TM)$  ein Vektorfeld, dass wir mit Hilfe der Komposition  $M \xrightarrow{Y} TM \rightarrow \mathbb{R}^n$  als Abbildung  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten. Als solche besitzt es eine Ableitung  $dY : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$  und im Punkt  $x$  erhalten wir  $dY|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für jedes  $\xi \in T_x M$  zerlegen wir  $dY(\xi) \in \mathbb{R}^n$  wie folgt

$$dY(\xi) = \pi_x^{\text{tan}}(dY(\xi)) + \pi_x^{\text{nor}}(dY(\xi)).$$

Wir wollen nun diese Summanden unabhängig voneinander untersuchen. Wir wählen nun eine Karte  $M \ni U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^m$ , und erhalten dann die Koordinatenfelder

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^m},$$

die in jedem Punkt  $x \in M$  eine Basis von  $T_x M$  darstellen.

Im Spezialfall  $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x$  und  $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi^j}$  wenden wir (A.1) auf die Komponenten von  $\frac{\partial}{\partial \varphi^j}$  an und erhalten dann

$$dY(\xi) = \left( d \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x \left( \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial \varphi^j} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x \left( \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \varphi \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\stackrel{(\text{A.1})}{=} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{\varphi(x)} \right), \quad (\text{A.8})$$

wobei  $\varphi^{-1}$  die zu  $\varphi$  inverse Abbildung ist.

**Definition A.15.** Sei  $Y \in \Gamma(TM)$  und  $\xi \in T_x M$ . Die *kovariante Ableitung* von  $Y$  in Richtung  $\xi$  ist

$$\nabla_\xi Y = \pi^{\text{tan}}(dY(\xi)) \in T_x M$$

Ist  $X \in \Gamma(TM)$ , dann ist  $x \mapsto \nabla_{X|_x} Y$  ein Vektorfeld, das wir mit  $\nabla_X Y$  bezeichnen.

**Lemma A.16.** Die folgenden Eigenschaften sind erfüllt:

(0) Die Abbildung  $T_x M \times \Gamma(TM) \rightarrow T_x M$ ,  $(\xi, Y) \mapsto \nabla_\xi Y$  ist bilinear.

(1) Für  $\xi \in T_x M$ ,  $Y \in \Gamma(TM)$  und  $f \in C^\infty(M)$  gilt die folgende Produktregel

$$\nabla_\xi(fY) = (\partial_\xi f)Y|_x + f(x)\nabla_\xi Y$$

Hierbei gilt  $\partial_\xi f = df|_x(\xi)$ .

(2) Für  $\xi \in T_x M$  und  $X, Y \in \Gamma(TM)$  gilt die folgende Produktregel

$$\partial_\xi \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_\xi X, Y|_x \rangle + \langle X|_x, \nabla_\xi Y \rangle$$

(3) Die *Christoffel-Symbole*  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\varphi(x)}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_x$$

definiert sind, erfüllen  $\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x)$  für alle  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$  und alle  $x \in U$ .

*Beweis.*

Man rechnet die Aussagen leicht nach, wobei man für (3) den Satz von Schwarz über

die Vertauschung partieller Ableitung und (A.8) nutzt.  $\square$

Nun wenden wir uns  $\pi_x^{\text{nor}}(dY(\xi))$  zu.

**Lemma A.17.** *Seien  $M$  und  $\varphi$  wie oben. Wir schreiben  $\xi \in T_x M$  und  $Y \in \Gamma(TM)$  als Linearkombinationen der Koordinatenvektorfelder:*

$$\xi = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x, \quad Y|_U = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j},$$

wobei  $\xi^i \in \mathbb{R}$  und  $Y^j \in C^\infty(U)$ . Dann gilt

$$\pi_x^{\text{nor}}(dY(\xi)) = \sum_{i,j=1}^m \xi^i Y^j|_x \pi_x^{\text{nor}} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{\varphi(x)} \right).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \pi_x^{\text{nor}}(dY(\xi)) &= \sum_{i,j=1}^m \pi_x^{\text{nor}} \left( d \left( Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \pi_x^{\text{nor}} \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x \left( Y^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \xi^i \pi_x^{\text{nor}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x Y^j \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + Y^j|_x \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^m \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_x Y^j \right) \underbrace{\pi_x^{\text{nor}} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right)}_{=0} + \sum_{i,j=1}^m \xi^i Y^j|_x \pi_x^{\text{nor}} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{\varphi(x)} \right) \end{aligned}$$

$\square$

**Folgerung A.18.**

(1) *Angenommen die beiden Vektorfelder  $Y_0, Y_1 \in \Gamma(TM)$  erfüllen  $Y_0|_x = Y_1|_x$ . Dann gilt auch  $\pi_x^{\text{nor}}(dY_0(\xi)) = \pi_x^{\text{nor}}(dY_1(\xi))$ . In anderen Worten: es gibt genau eine wohldefinierte bilineare Abbildung  $\Pi_x : T_x M \times T_x M \rightarrow N_x M$ , so dass  $\Pi_x(\xi, Y|_x) = \pi_x^{\text{nor}}(dY(\xi))$  für  $\xi \in T_x M$  und  $Y \in \Gamma(TM)$ .*

(2) *Für alle  $\xi, \eta \in T_x M$  gilt  $\Pi_x(\xi, \eta) = \Pi_x(\eta, \xi)$ .*

Die Abbildung  $X, Y \mapsto \Pi_x(X, Y)$  heißt die *(vektor-wertige) zweite Fundamentalform* in  $x$ . In der Sprache der Vektorbündel ausgedrückt, haben wir somit:

$$\Pi \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes NM)$$

Die *erste Fundamentalform* ist gegeben durch

$$g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$$

für jedes  $x \in M$ . In der Sprache der Vektorbündel:

$$g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) = \Gamma(T^{(0,2)}M).$$

Für konkrete Rechnungen ist es oft hilfreich, die erste Fundamentalform in Koordinaten auszudrücken. Für eine Karte  $M \ni U \xrightarrow{x} V \subseteq \mathbb{R}^m$  definieren wir

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{ij}(\hat{x}) := g_{\hat{x}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{x}}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\hat{x}}\right)$$

Es ergibt sich dann

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

## A.2.2. Hyperflächen und Flächen

**Definition A.19.** Eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  nennt man eine *Fläche*, falls  $m = 2$ . Man nennt sie eine *Hyperfläche*, falls  $n = m + 1$ . Für Hyperflächen ist der Normalenraum  $N_x M$  in jedem  $x \in M$  ein-dimensional. Ist  $M$  eine Hyperfläche, so ist ein *Einheitsnormalenfeld (ENF)* eine glatte Abbildung  $\nu : M \rightarrow S^m$  mit  $\nu_x \perp T_x M$  für alle  $x \in M$ .

Insbesondere  $\nu \in \Gamma(NM)$ . Nicht alle Hyperflächen besitzen ein ENF. Ein ENF existiert, genau dann, wenn  $M$  orientierbar ist (siehe Analysis IV).

Sobald ein ENF  $\nu$  auf einer Hyperfläche fixiert ist, können wir die *(skalare) zweite Fundamentalform*  $h_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Gleichung

$$\Pi_x(X, Y) = h_x(X, Y)\nu_x$$

definieren. Wir erhalten

$$h \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) = \Gamma(T^{(0,2)}M).$$

Um die zweite Fundamentaltform in Koordinaten  $x : U \rightarrow V$  auszudrücken, definieren wir analog zu oben

$$h_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_{ij}(\hat{x}) := h_{\hat{x}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{x}}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\hat{x}}\right),$$

und wir erhalten dann

$$h|_U = \sum_{i,j=1}^m h_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$



**Übung A.3.** Sei  $M$  eine Hyperfläche mit ENF  $\nu : M \rightarrow S^m$ . Für  $\xi \in T_{\hat{x}}M$  definieren wir  $W_{\hat{x}}(\xi) := -(d\nu)|_{\hat{x}}(\xi) = -\partial_{\xi}\nu$ . Zeigen Sie  $W_{\hat{x}}(\xi) \in T_{\hat{x}}M$  und  $g_{\hat{x}}(W_{\hat{x}}(\xi), \eta) = \langle \nu|_{\hat{x}}x, \Pi(\xi, \eta) \rangle$  für alle  $\xi, \eta \in T_{\hat{x}}M$ .

Wir schreiben wieder einfach  $x \in M$  statt  $\hat{x} \in M$ . Man nennt  $W_x : T_xM \rightarrow T_xM$  die *Weingartenabbildung* in  $x$ . Sie ist symmetrisch, also insbesondere diagonalisierbar. Die Eigenwerte von  $W_x$  nennt man die *Hauptkrümmungen* und die Eigenvektoren die *Hauptkrümmungsrichtungen*. Man beachte, dass die Hauptkrümmungsrichtungen i. Allg. nicht mehr stetig von  $x$  abhängen.

Aus den punktweise (das heißt in jedem  $x \in M$ ) definierten  $W_x$  erhalten wir einen Schnitt

$$W \in \Gamma(T^*M \otimes TM) = \Gamma(T^{(1,1)}M).$$

Dann heißt  $H(x) := \frac{1}{m} \text{tr } W_x$  die *mittlere Krümmung* von  $M$  an der Stelle  $x$ . Ist  $(e_1, \dots, e_m)$  eine Orthogonalbasis von  $T_xM$ , so gilt

$$mH(x) = \sum_{i=1}^m g_x(W_x(e_i), e_i) = \sum_{i=1}^m \langle \nu_x, \Pi_x(e_i, e_i) \rangle,$$

also insbesondere  $\sum_{i=1}^m \Pi(e_i, e_i) = mH(x) \nu_x$ .

Im Fall  $m = 2$  heißt  $K(x) := \det W_x$  die *Gaußkrümmung* von  $M$  in  $x$ .

**Übung A.4.** Zeigen Sie

$$H = \frac{1}{m} \sum_{ij} g^{ij} h_{ij}$$

wobei  $(g^{ij}(x))_{ij}$  die zu  $(g_{ij}(x))_{ij}$  inverse Matrix bezeichnet. Zeigen Sie

$$\det W = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}.$$

**Bemerkung A.20.** Für beliebige Untermannigfaltigkeiten kann man durch

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Pi(e_i, e_i) \in N_x M$$

eine vektorwertige mittlere Krümmung definieren. Sie ist von zentraler Bedeutung, wenn man das Volumen einer Untermannigfaltigkeit unter kleinen Deformationen (mathematisch präziser: Variationen) der Untermannigfaltigkeit untersucht (siehe Zentralübung).

**Beispiel A.21.** Sei wieder

$$S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die Sphäre. Die erste Fundamentalform dieser Untermannigfaltigkeit bezeichnen wir ab sofort mit  $g_{\text{sph}}$ .

Als ENF können wir  $\nu_x := x$  wählen. Daraus ergibt sich  $W_x = -\text{id}_{T_x S^m}$ , also ist die mittlere Krümmung  $-1$ . Falls  $m = 2$ , dann ist die Gaußkrümmung  $1$ .

**Beispiel A.22.** Wir betrachten die folgende Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Psi(x^1, x^2) := \begin{pmatrix} \cos(x^1) \\ \sin(x^1) \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $\Psi|_{(\alpha, \alpha+2\pi) \times \mathbb{R}}$  eine Parametrisierung des Zylinders in  $\mathbb{R}^3$ . Als ENF können wir

$$\nu_{\Psi(x^1, x^2)} := \begin{pmatrix} \cos(x^1) \\ \sin(x^1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Man berechnet

$$W_x\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad W_x\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Also  $H = -\frac{1}{2}$  und  $K = 0$ .

**Beispiel A.23.** Wir schreiben eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$  lokal als Graph. Sei hierzu  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Wir definieren

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad M := \{F(x, y) \mid (x, y) \in V\}.$$

Als Karte wählen wir

$$\varphi : M \rightarrow U \rightarrow V, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Somit ordnet  $\varphi^1$  jedem Punkt in  $M$  die  $x$ -Koordinate zu, und  $\varphi^2$  die  $y$ -Koordinate. Es ist deswegen üblich  $\frac{\partial}{\partial x}$  für  $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  für  $\frac{\partial}{\partial \varphi^2}$  zu schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(x, y)} &= \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x, y)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x, y)} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(x, y)} &= \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x, y)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x, y)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_{xx} &= g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \\ g_{xy} &= g_{yx} = g_{12} = g_{21} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

$$g_{yy} = g_{22} = 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

Also

$$\det^\varphi g := \det \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 1 + \|df\|^2$$

$$\begin{aligned} g^{xx} &= \frac{1}{\det^\varphi g} \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \\ g^{xy} &= g^{yx} = -\frac{1}{\det^\varphi g} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ g^{yy} &= \frac{1}{\det^\varphi g} \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Ein Einheitsnormalenfeld ist gegeben durch

$$\nu = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y} \right\|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + \|df\|^2}}.$$

Also

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \nu \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} \\ h_{xy} &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \nu \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} \\ h_{yy} &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \nu \right\rangle = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \|df\|^2}} \end{aligned}$$

Unter Nutzung der Übungsaufgabe A.4 erhalten wir daraus eine Formel für die mittlere Krümmung

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (g^{xx} h_{xx} + 2g^{xy} h_{xy} + g^{yy} h_{yy}) \\ &= \frac{1}{2 \det^\varphi g} (g_{yy} h_{xx} - 2g_{xy} h_{xy} + g_{xx} h_{yy}) \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{1 + \|df\|^2}^3} \left[ \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

und analog eine für die Gaußkrümmung:

$$K = \frac{\det^\varphi h}{\det^\varphi g} = \frac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{g_{xx} g_{yy} - g_{xy}^2}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2}{(1 + \|df\|^2)^2}$$

Insbesondere ergibt sich im Fall der  $xy$ -Ebene (mit  $f \equiv 0$ )  $W = 0$ ,  $H = 0$ ,  $K = 0$ .

### A.2.3. Isometrische und konforme Abbildungen, Isometrien

**Definition A.24.** Eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten  $f : M \rightarrow Q$  nennen wir *konform* oder *winkeltreu*, falls es eine glatte Funktion  $u : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass für alle  $x \in M$  und alle  $X, Y \in T_x M$  gilt:

$$\langle df_x(X), df_x(Y) \rangle = u(x) \langle X, Y \rangle.$$

Dies ist äquivalent zu  $f^*g^Q = ug^M$ , wobei  $g^M$  bzw.  $g^Q$  die erste Fundamentalform von  $M$  bzw.  $Q$  ist. Wir nennen  $f$  *isometrisch*, falls  $u \equiv 1$ . Eine *Isometrie* ist ein isometrischer Diffeomorphismus. Ist  $f$  eine Isometrie, dann auch  $f^{-1}$ .

**Beispiel A.25.** Sei  $g_{\text{eukl}}$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2$ , und  $(E_1, E_2)$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$ . Die Abbildung  $\Psi$  aus Beispiel A.22 ist isometrisch, und zwar sowohl, wenn man sie als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , als auch wenn man sie als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow M_{\text{zyl}} := \Psi(\mathbb{R}^2)$  betrachtet, denn für  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \langle d\Psi(E_i), d\Psi(E_j) \rangle = \delta_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle.$$

Da die Abbildungen aber nicht injektiv sind, sind sie keine Isometrien.

Die durch  $\Psi$  definierte Abbildung  $(0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow M_{\text{zyl}} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \mid x^2 \in \mathbb{R} \right\}$  ist ein Diffeomorphismus und somit eine Isometrie. Es gilt  $\Psi^*g^M = g_{\text{eukl}}$ .

Wir identifizieren nun  $\mathbb{R}^2$  mit der Fläche  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Die skalare zweite Fundamentalform von  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  bzw. von  $M_{\text{zyl}}$  schreiben wir als  $h^{\mathbb{R}^2}$  bzw. als  $h^{\text{zyl}}$ , und die mittlere Krümmung entsprechen als  $H^{\mathbb{R}^2}$  bzw.  $H^{\text{zyl}}$ . Dann gilt  $h_{11}^{\text{zyl}} = -1$ ,  $h_{12}^{\text{zyl}} = 0$  und  $h_{22}^{\text{zyl}} = 0$ , und für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  haben wir  $h_{ij}^{\mathbb{R}^2} = 0$ . Somit gilt

$$\Psi^*h^{\text{zyl}} \neq 0 = h^{\mathbb{R}^2}, \quad \Psi^*H^{\text{zyl}} = -\frac{1}{2} \neq 0 = H^{\mathbb{R}^2}.$$

Wenn wir nun Tensoren auf  $M_{\text{zyl}}$  mit ihrem Pullback auf  $\mathbb{R}^2$  identifizieren, so erhält  $\Psi$  die erste Fundamentalform (da  $\Psi$  isometrisch ist), aber nicht die (skalare) zweite Fundamentalform und nicht die mittlere Krümmung.

Es ist nun erstaunlich, dass der folgende durch die zweite Fundamentalform definierter Ausdruck invariant unter Isometrien ist.

**Satz A.26 (Riemann, 1854 bzw. 1876, [Link zur Historie \(Wikipedia\)](#)).**

Seien  $M$  und  $Q$  Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^k$  mit vektorwertigen Fundamentalformen  $\Pi^M$  und  $\Pi^Q$ . Sei  $f : M \rightarrow Q$  eine Isometrie. Dann gilt für alle  $x \in M$  und alle  $X, Y, Z, W \in T_x M$ :

$$\begin{aligned} \langle \Pi^M(X, W), \Pi^M(Y, Z) \rangle - \langle \Pi^M(X, Z), \Pi^M(Y, W) \rangle \\ = \langle \Pi^Q(df(X), df(W)), \Pi^Q(df(Y), df(Z)) \rangle - \langle \Pi^Q(df(X), df(Z)), \Pi^Q(df(Y), df(W)) \rangle \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir andeuten, wie der Satz gezeigt wird.

Unter Isometrien bleibt also im allgemeinen zwar nicht die zweite Fundamentalform  $\Pi$  erhalten, wohl aber der oben verwendete quadratische Ausdruck in  $\Pi$ .

Im Spezialfall, dass  $M$  und  $Q$  Hyperflächen mit skalaren zweiten Fundamentalformen  $h^M$  und  $h^Q$  sind, besagt dieser Satz also

$$\det \begin{pmatrix} h^M(X, W) & h^M(X, Z) \\ h^M(Y, W) & h^M(Y, Z) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h^Q(df(X), df(W)) & h^Q(df(X), df(Z)) \\ h^Q(df(Y), df(W)) & h^Q(df(Y), df(Z)) \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Man kann die Formel auch etwas eleganter schreiben, indem wir auf  $M$  den *Krümmungstensor*

$$R_{\Pi}^M|_x(X, Y, Z, W) := \langle \Pi^M(X, W), \Pi^M(Y, Z) \rangle - \langle \Pi^M(X, Z), \Pi^M(Y, W) \rangle$$

definieren und  $R_{\Pi}^Q$  analog für  $Q$ . Dann gilt  $R_{\Pi}^M \in \Gamma(T^{(0,4)}M)$  und  $R_{\Pi}^Q \in \Gamma(T^{(0,4)}Q)$ . Mit diesen Bezeichnungen ist (A.9) äquivalent zu der Folgerung:

**Folgerung A.27.** Sind  $M$  und  $Q$  Untermannigfaltigkeiten, und ist  $f : M \rightarrow Q$  eine Isometrie. Dann gilt

$$R_{\Pi}^M = f^* R_{\Pi}^Q.$$

**Bemerkung A.28.** Um die Struktur des Ausdrucks  $R_{\Pi}^M$  beziehungsweise der beiden Seiten von (A.9) besser zu verstehen und um uns diese Formeln besser merken zu können, betrachten wir das folgende.

Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt  $G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Flächeninhalt  $A(X, Y)$  des Parallelogramms mit Seiten  $X$  und  $Y$  in  $V$  berechnet sich als

$$A(X, Y) := \sqrt{\det \begin{pmatrix} G(X, X) & G(X, Y) \\ G(Y, X) & G(Y, Y) \end{pmatrix}}.$$

Wir haben also eine quadratische Abbildung  $V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \otimes Y \mapsto -A(X, Y)^2$ . Durch Polarisation sieht man, dass jede quadratische Abbildung von genau einer symmetrischen bilinearen Abbildung herrührt. In unserem Fall bedeutet dies, dass es eine genau eine symmetrische bilineare Abbildung

$$\mathcal{A}^G : (V \otimes V) \times (V \otimes V) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $\mathcal{A}^G(X \otimes Y, X \otimes Y) = -A(X, Y)^2$  gibt. Man kann  $\mathcal{A}^G$  als Element in  $V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$  oder als multilineare Abbildung  $V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten. Man überprüft leicht, dass

$$\mathcal{A}^G(X, Y, Z, W) = \det \begin{pmatrix} G(X, W) & G(X, Z) \\ G(Y, W) & G(Y, Z) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Wenn wir nun formal  $G$  durch  $h^M$  oder  $f^*h^Q$  ersetzen, so erhalten wir bis auf das Vorzeichen die linke oder rechte Seite von Gleichung (A.9).

**Übung A.5.** Sei  $G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform und  $\mathcal{A}^G$  durch (A.10) definiert. Zeigen Sie für  $X, Y, Z, W \in V$ :

- (1)  $\mathcal{A}^G(X, Y, Z, W) = -\mathcal{A}^G(Y, X, Z, W) = -\mathcal{A}^G(X, Y, W, Z)$  (Partielle Antisymmetrie)
- (2)  $\mathcal{A}^G(X, Y, Z, W) + \mathcal{A}^G(Y, Z, X, W) + \mathcal{A}^G(Z, X, Y, W) = 0$  (1. Bianchi-Identität)
- (3)  $\mathcal{A}^G(X, Y, Z, W) = \mathcal{A}^G(Z, W, X, Y)$  (Block-Vertauschung)

Zeigen Sie zudem: Jeder Tensor in  $V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ , der die Symmetrien (1) und (2) erfüllt, erfüllt auch die Symmetrie (3).

Insbesondere folgt aus der Übung, dass  $R_{\Pi}^M|_x \in \left(\wedge^2 T_x^* M\right) \otimes \left(\wedge^2 T_x^* M\right)$ .

**Beispiel A.29.** Wir betrachten den Spezialfall einer orientierten Fläche  $M$  in  $\mathbb{R}^3$  mit erster Fundamentalform  $g$ . Auf Grund der obigen Übung haben wir  $R_{\Pi}^M, \mathcal{A}^g \in \Gamma(\wedge^2 T^* M \otimes \wedge^2 T^* M)$ . Ist  $e_1, e_2 \in T_x M$  eine Orthonormalbasis so gilt

$$\begin{aligned} R_{\Pi}^M(e_1, e_2, e_2, e_1) &= \langle \Pi^M(e_1, e_1), \Pi^M(e_2, e_2) \rangle - \langle \Pi^M(e_1, e_2), \Pi^M(e_2, e_1) \rangle^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} g(W_x(e_1), e_1) & g(W_x(e_1), e_2) \\ g(W_x(e_2), e_1) & g(W_x(e_2), e_2) \end{pmatrix} = \det W_x = K(x) \\ \mathcal{A}^g(e_1, e_2, e_2, e_1) &= 1 \end{aligned}$$

Aus  $\dim \left(\wedge^2 T^* M\right) \otimes \left(\wedge^2 T^* M\right) = 1$  folgt dann

$$R_{\Pi}^M = K \mathcal{A}^g.$$

**Satz A.30 (Theorema egregium von Gauß, 1827, [Link zur Publikation](#)).**

Seien  $M$  und  $Q$  Flächen in  $\mathbb{R}^3$  und  $f : M \rightarrow Q$  eine Isometrie. Dann gilt

$$K^M = K^Q \circ f.$$

Ist  $U$  eine offene Teilmenge von  $S^2$  und  $V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Dann gibt es keine Isometrie von  $U$  nach  $V$ .

### A.3. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Das Theorema Egregium (Satz A.30) und seine Verallgemeinerung durch Riemann auf höhere Dimensionen (Satz A.26) besagen, dass ein quadratischer Ausdruck in der zweiten Fundamentalform, den wir mit  $R_{\Pi}^M$  bezeichnet haben, unter Isometrien erhalten bleibt. Das Ziel des aktuellen Abschnitts ist es zu erklären, wie man  $R_{\Pi}^M$  direkt aus der ersten Fundamentalform heraus bestimmen kann, ohne die zweite Fundamentalform  $\Pi^M$  zu bestimmen. Aus diesen Ergebnissen ergibt sich dann ein Beweis der Sätze A.30 und A.26. Die Ergebnisse helfen uns auch zu verstehen, wie eine Mannigfaltigkeit in sich gekrümmt ist, ohne dass wir den umgebenden Raum betrachten. Dieses Verständnis war eine sehr fundamentale mathematische Voraussetzung für die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

Alle Größen, die unter Isometrien invariant sind, nennt man Größen der inneren Geometrie.

In einem ersten Schritt verallgemeinern wir Untermannigfaltigkeiten mit erster Fundamentalform zu riemannschen Mannigfaltigkeiten.

**Definition A.31.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *riemannsche Metrik* auf  $M$  ist ein  $(0, 2)$ -Tensor  $g \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$ , so dass für jedes  $x \in M$  die Bilinearform  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrisch und positiv ist. Das heißt, dass  $g_x$  ein Skalarprodukt auf  $T_x M$  definiert.

Eine *riemannsche Mannigfaltigkeit* ist ein Paar  $(M, g)$ , wobei  $g$  eine riemannsche Metrik auf der Mannigfaltigkeit  $M$  ist.

Unter anderem ist eine riemannsche Metrik  $g : M \rightarrow T^{(0,2)}M$  eine glatte Abbildung. Ist  $\mathcal{A} = \{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha | \alpha \in A\}$  ein Atlas, so ist die Glattheit äquivalent dazu, dass

$$g_{ij}^\alpha := g \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

für alle  $\alpha \in A$  und  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  glatt ist. Meistens schreiben wir einfach  $M$  für  $(M, g)$ .

**Definition A.32.** Eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow Q$  zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g^M)$  und  $(Q, g^Q)$  heißt *konform*, falls  $f^*g^Q = ug^M$  für eine glatte Abbildung  $u : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Gilt zusätzlich  $u \equiv 1$ , so nennt man  $f$  *isometrisch*. Eine *Isometrie* ist ein isometrischer Diffeomorphismus. Zwei riemannsche Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $Q$  nennt man *isometrisch*, falls es eine Isometrie von  $M$  nach  $Q$  gibt. Zwei riemannsche Metriken  $g_1$  und  $g_2$  nennt man *konform*, falls die Identität  $\text{id}_M : (M, g_1) \rightarrow (M, g_2)$  konform ist, d. h.  $g_1 = ug_2$  für ein  $u : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Zwei riemannsche Mannigfaltigkeiten sind *konform äquivalent*, falls es einen konformen Diffeomorphismus von  $M$  auf  $Q$  gibt.

**Beispiel A.33.** Die erste Fundamentalform einer Untermannigfaltigkeit ist eine riemannsche Metrik. Umgekehrt besagt der (nicht einfach zu beweisende) Nashsche Einbettungssatz, dass es zu jeder riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ein  $N \in \mathbb{N}$  und eine Untermannigfaltigkeit  $Q$  von  $\mathbb{R}^N$  gibt, so dass  $(M, g)$  isometrisch zu  $Q$  mit der ersten Fundamentalform ist.

**Übung A.6.** Die stereografische Projektion

$$S^m \setminus \{(1, 0, \dots, 0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin(\vartheta) \cdot y \end{pmatrix} \mapsto \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot y, \quad \vartheta \in (0, \pi], \quad y \in S^{m-1}$$

ist ein konformer Diffeomorphismus.

Für Untermannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^n$  haben wir die kovariante Ableitung  $\nabla$  eingeführt. Um beliebige riemannsche Mannigfaltigkeit zu untersuchen, sollten wir die kovariante Ableitung nun verallgemeinern. Die Idee ist hierbei, die für Untermannigfaltigkeiten in Lemma A.16 gezeigten Eigenschaften nun als Axiome zu nutzen. Die folgende Proposition besagt nun, dass es genau eine bilineare Abbildung  $\nabla$  gibt, die diese Axiome erfüllt. Diese Abbildung  $\nabla$  verallgemeinert also den Begriff der kovarianten Ableitung aus der Theorie der Untermannigfaltigkeiten.

**Proposition A.34.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Es gibt dann genau eine bilineare Abbildung

$$T_x M \times \Gamma(TM) \rightarrow T_x M, \quad (\xi, Y) \mapsto \nabla_\xi Y,$$

genannt den **Levi-Civita-Zusammenhang** oder die **kovariante Ableitung**, so dass gilt:

(1) Für  $\xi \in T_x M$ ,  $Y \in \Gamma(TM)$  und  $f \in C^\infty(M)$  gilt die folgende Produktregel

$$\nabla_\xi(fY) = (\partial_\xi f)Y|_x + f(x)\nabla_\xi Y$$

(2) Für  $\xi \in T_x M$  und  $X, Y \in \Gamma(TM)$  gilt die folgende Produktregel

$$\partial_\xi g(X, Y) = g(\nabla_\xi X, Y|_x) + g(X|_x, \nabla_\xi Y)$$

(3) Die **Christoffel-Symbole**  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \Big|_{\varphi(x)} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \Big|_x$$

definiert sind, erfüllen  $\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x)$  für alle  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$  und alle  $x \in U$ .

Ist  $f : (M, g) \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$  eine Isometrie, dann ist  $\nabla$  im folgenden Sinne invariant unter  $f$ . Für  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $\hat{X} \in \Gamma(T\hat{M})$  mit  $df(X) = \hat{X} \circ f : M \rightarrow T\hat{M}$  und  $\xi \in T_x M$  gilt

$$df(\nabla_\xi X) = \nabla_{df(\xi)} \hat{X}.$$

Die Teilaussage der Proposition über die Existenz und Eindeutigkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs stimmt mit [24, Chap. 2, Sec. 3] überein, und wir verweisen auf den



Beweis in diesem Buch. Die Invarianz unter Isometrien ist dann eine unmittelbare Konsequenz.

Für  $X, Y \in \Gamma(TM)$  erhalten wir  $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$ .

**Lemma A.35 (Die kovariante Ableitung ist lokal).** *Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  die kovariante Ableitung von  $M$ . Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x \in M$ .*

(a) *Sei  $\xi \in T_x M$  und  $Y, \tilde{Y} \in \Gamma(TM)$ . Angenommen auf einer Umgebung  $U$  von  $x$  gilt  $Y|_U = \tilde{Y}|_U$ , dann gilt auch  $\nabla_\xi Y = \nabla_\xi \tilde{Y}$ .*

(b) *Sei  $\nabla^U$  die kovariante Ableitung auf der riemannschen Mannigfaltigkeit  $(U, g|_U)$ ,  $x \in M$ ,  $\xi \in T_x M$ . Dann gilt  $\nabla_\xi Y = \nabla_\xi^U (Y|_U)$ .*

*Beweis.*

Zu (a): Man kann zeigen, dass es eine glatte Funktion  $\eta : M \rightarrow [0, 1]$  gibt, so dass  $\eta = 0$  auf  $M \setminus U$  und  $\eta = 1$  auf einer Umgebung  $V$  von  $x$ . Offensichtlich ist  $V$  eine echte Teilmenge von  $U$ . Dann gilt  $\eta(Y - \tilde{Y}) = 0$ . Wir rechnen

$$0 = \nabla_\xi (\eta(Y - \tilde{Y})) = \underbrace{(\partial_\xi \eta)}_{=0} Y|_x + \eta(x) \nabla_\xi Y - \underbrace{(\partial_\xi \eta)}_{=0} \tilde{Y}|_x - \eta(x) \nabla_\xi \tilde{Y} = \nabla_\xi Y - \nabla_\xi \tilde{Y}.$$

Zu (b): Sei  $\Gamma_U(TM) := \{Y|_U \mid Y \in \Gamma(TM)\} \subset \Gamma(TU)$  und  $\mathcal{C}^\infty_U(M) := \{f|_U \mid f \in \mathcal{C}^\infty(M)\} \subset \mathcal{C}^\infty(U)$

Durch Einschränkung erhalten wir eine Abbildung

$$\tilde{\nabla} : T_x M \times \Gamma_U(TM) \rightarrow T_x M, \quad (\xi, \hat{Y}) \mapsto \nabla_\xi Y,$$

falls  $Y$  eine Fortsetzung von  $\hat{Y}$  ist. Die Eigenschaft (a) besagt, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, da sie nicht von der Wahl der Fortsetzung abhängt, und sie besagt auch, dass den Eigenschaften (1)–(3) der Proposition für alle  $f \in \mathcal{C}^\infty_U(TM)$  und alle  $X, Y \in \Gamma_U(TM)$  erfüllt sind.

Die Eigenschaft (b) folgt nun im wesentlichen aus der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage der vorangehenden Proposition. Allerdings hier zu beachten: um mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage von  $\nabla^U = \tilde{\nabla}$  zu zeigen, müssen wir  $\tilde{\nabla}$  zu einer bilinearen Funktion  $T_x M \times \Gamma(TU) \rightarrow T_x M = T_x U$  fortsetzen, die die Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Dies ist ebenfalls auf Grund von Aussage (a) möglich.  $\square$

## A.4. Krümmung riemannscher Mannigfaltigkeiten

**Proposition A.36.** Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen  $(1, 3)$ -Tensor  $R \in \Gamma(T^{(1,3)}M)$ , geschrieben als  $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ , so dass für alle  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  und alle  $x \in M$  gilt

$$R(X|_x, Y|_x)Z|_x = \left( \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z \right)|_x.$$

Die Aussage wird zum Beispiel in [24, Chap. 4, Sec. 2] bewiesen.

Man nennt  $R$  den *riemannschen Krümmungstensor* von  $(M, g)$ .

**Satz A.37.** Ist  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ , ist  $g$  die erste Fundamentalform und ist  $\Pi$  die zweite Fundamentalform von  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ , dann gilt für alle  $x \in M$  und alle  $X, Y, Z, W \in T_x M$ :

$$g(R(X, Y)Z, W) = R_{\Pi}(X, Y, Z, W).$$

Die Aussage ist ein Spezialfall von [24, Chap. 6, Prop. 3.1 (a)]. Für einen Beweis verweisen wir auf diese Quelle.

Aus dieser Proposition und diesem Satz folgt das Theorema Egregium (Satz A.30) und seine Verallgemeinerung (Satz A.26) unmittelbar.

Für  $(X, Y, Z, W) \mapsto g(R(X, Y)Z, W)$  gelten wiederum die partielle Antisymmetrie, die 1. Bianchi-Identität und die Block-Vertauschung aus Übung A.5.

**Definition A.38.** Sei  $\sigma$  eine Ebene in  $TM$  (das heißt: es gibt ein  $x \in M$ , so dass  $\sigma$  ein zwei-dimensionaler Untervektorraum von  $T_x M$  ist), und sei  $(e_1, e_2)$  eine Basis von  $\sigma$ . Dann definieren wir die *Schnittkrümmung* von  $(M, g)$  in  $\sigma$  als

$$K(\sigma) := g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) / \mathcal{A}^g(e_1, e_2, e_2, e_1).$$

**Übung A.7.** Zeigen Sie, dass  $K(\sigma)$  nicht von der Wahl der Basis  $(e_1, e_2)$  abhängt.

Im Fall  $\dim M = 2$  und  $\sigma = T_x M$  ist  $K(\sigma)$  die Gaußkrümmung in  $x$ .

**Beispiel A.39.** Die Schnittkrümmung von  $(S^m, g_{\text{sph}})$  ist 1 für alle Ebenen in  $TS^m$ . Die Schnittkrümmung des hyperbolischen Raums  $(\mathcal{H}^m, g_{\text{hyp}})$  (Definition: siehe Übungen) ist  $-1$  für alle Ebenen in  $T\mathcal{H}^m$ .

**Übung A.8.** Es sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und sei  $R$  der Riemannsche Krümmungstensor. Relativ zur Basis  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$  haben wir

$$\sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} = R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Zeigen Sie, dass der Riemannsche Krümmungstensor folgende Form in der lokalen Karte  $x: U \rightarrow M$  hat:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{s=1}^n \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \sum_{s=1}^n \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l.$$

**Lemma A.40.** Seien  $g$  und  $\tilde{g}$  zwei riemannsche Metriken auf  $M$ , seien  $K(\sigma)$  und  $\tilde{K}(\sigma)$  (bzw.  $R$  und  $\tilde{R}$ ) die dazu assoziierten Schnittkrümmungen (bzw. riemannschen Krümmungstensoren). Angenommen in einem  $x \in M$  gilt  $g_x = \tilde{g}_x$  und  $K(\sigma) = \tilde{K}(\sigma)$  in allen Ebenen  $\sigma \subset T_x M$ , dann folgt  $R_x = \tilde{R}_x$ .

Beweis siehe [24, Chap. 4, Lemma 3.3].

**Definition A.41.** Zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  definieren wir den *Ricci-Krümmungs-Tensor*  $\text{ric} \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$  als

$$\text{ric}(Y, Z) := \text{tr}\left(R(\cdot, Y)Z: X \mapsto R(X, Y)Z\right).$$

Zu jedem  $V \in TM$ ,  $V \neq 0$  definieren wir die *Ricci-Krümmung* in Richtung  $V$  als  $\text{ric}(V, V)/g(V, V)$ .

Aus den Symmetrien des riemannschen Krümmungstensor folgt

$$\text{ric}(Y, Z) = \sum_{i=1}^m g(R(e_i, Y)Z, e_i) = \sum_{i=1}^m g(R(e_i, Z)Y, e_i) \text{ric}(Z, Y)$$

für eine Orthonormalbasis  $(e_1, \dots, e_m)$  von  $T_x M$ .

**Definition A.42.** Die *Skalarkrümmung*  $\text{scal}: M \rightarrow \mathbb{R}$  einer riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist definiert als

$$\text{scal}(x) := \sum_{i=1}^m \text{ric}(e_i, e_i),$$

wobei  $(e_1, \dots, e_m)$  eine Orthonormalbasis von  $T_x M$  ist. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl dieser Orthonormalbasis.

**Übung A.9.** Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $e_1, \dots, e_m$  eine Orthonormalbasis von  $T_x M$ . Seien  $K$ ,  $\text{ric}$  und  $\text{scal}$  die Schnittkrümmung, der Ricci-Tensor und die Skalarkrümmung. Zeigen Sie

$$\text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m K(\text{span}\{e_i, e_j\}), \quad \text{scal}(x) = \sum_{i=1}^m \text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^m K(\text{span}\{e_i, e_j\}).$$

Zu einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  bezeichne nun  $\mathcal{K}(V)$  den Raum aller Tensoren  $Q \in (V^*)^{\otimes 4} := V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ , die die partielle Antisymmetrie und die 1. Bianchi-Identität (und damit auch die Block-Vertauschung) erfüllen. Wir nennen  $\mathcal{K}(V)$  den *Raum aller Krümmungstensoren* auf  $V$ . Ein Skalarprodukt auf  $V$  induziert ein eindeutige Skalarprodukt auf  $(V^*)^{\otimes 4}$ , indem wir fordern: ist  $(e_i)_{i \in \{1,2,\dots,m\}}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , mit dualer Basis  $(e_i^*)_{i \in \{1,2,\dots,m\}}$  von  $V^*$ , so ist  $(e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k^* \otimes e_\ell^*)_{i,j,k,\ell \in \{1,2,\dots,m\}}$  eine Orthonormalbasis von  $(V^*)^{\otimes 4}$ . Dies induziert ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{K}(V) \subset (V^*)^{\otimes 4}$ . Für einen Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt  $g$  definieren wir nun

$$\pi^{\text{ric}} : \mathcal{K}(V) \rightarrow V^* \otimes V^*, \quad Q \mapsto \left( (Y, Z) \mapsto \sum_{i=1}^m Q(e_i, Y, Z, e_i) \right)$$

wobei wieder  $(e_i)_{i \in \{1,2,\dots,m\}}$  eine Orthonormalbasis für  $g$  ist. Die Definition von  $\pi^{\text{ric}}$  ist unabhängig von der Wahl dieser Orthonormalbasis. Wir haben dann

$$\text{ric} := \pi^{\text{ric}} g \left( R(\cdot \cdot) \cdot, \cdot \right).$$

**Lemma A.43.** Zu jedem  $R_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$  gibt es eine riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M^m, g)$ , ein  $x \in M$  und eine Vektorraum-Isometrie  $I : (T_x M, g_x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, g_{\text{eukl}})$  mit  $I^* \left( g(R(\cdot \cdot) \cdot, \cdot) \right) = R_0$ .

Bei Interesse an einem Beweis bitte nachfragen.

**Lemma A.44.** Die Abbildung  $\pi^{\text{ric}} : \mathcal{K}(V) \rightarrow V^* \otimes V^*$  ist genau dann injektiv, wenn  $\dim V \in \{2, 3\}$ .

Sei nun  $\pi^W$  die Orthogonalprojektion von  $\mathcal{K}(V)$  auf den Kern von  $\pi^{\text{ric}}$ .

**Definition A.45.** Der *Weylkrümmungs-(0,4)-tensor* (oder einfach *die Weylkrümmung*  $W \in \Gamma(T^{(0,4)}M)$ ) ist definiert als

$$W_x := \pi^W \left( g_x(R_x(\cdot \cdot) \cdot, \cdot) \right).$$

## B. Zusammenfassung von wichtigen Sätzen der Funktionalanalysis

**Satz B.1 (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Abbildungen).** *Sei  $H$  ein reeller Hilbertraum unendlicher Dimension und  $L : H \rightarrow H$  ein kompakter selbstadjungierter linearer Operator. Dann besteht das Spektrum von  $L$  genau aus den Eigenwerten von  $L$  und 0. Alle Eigenwerte sind reell. Der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ , d. h.  $V_\lambda := \ker(L - \lambda)$  hat endliche Dimension und es gilt  $V_\lambda \perp V_\mu$ , falls  $\lambda \neq \mu$ . Der Eigenwert 0 liegt im essenziellen Spektrum von  $L$ . Das Spektrum von  $L$  hat entweder keinen Häufungspunkt (ist dann also eine endliche Menge) oder hat 0 als einzigen Häufungspunkt (ist dann also abzählbar unendlich). Der Raum  $\bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(L)} V_\lambda$  ist dicht in  $H$ .*

**Satz B.2 (Satz von der offenen Abbildung).** *Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume, und sei  $f : X \rightarrow Y$  eine beschränkte, lineare und surjektive Abbildung. Dann ist  $f$  offen, bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab. Ist zusätzlich  $f$  injektiv, dann ist  $f^{-1}$  also auch beschränkt.*

Man findet diesen Satz mit Beweis in allen gängigen Büchern zur Funktionalanalysis, zum Beispiel als [36, Satz 9.1 und Kor. 9.2].



## C. Konventionen

$\mathbb{R}_{>0}$  bzw.  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist die Menge der positiven bzw. nichtnegativen reellen Zahlen.

Unklar: ist 0 eine natürliche Zahl

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$ : natürliche Zahlen mit Null

$\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_{>0}$ : natürliche Zahlen ohne Null

komplexe Skalarprodukte sind komplex linear in der erste Komponente und komplex antilinear in der zweiten

Wir nutzen sowohl  $f(x) = \mathcal{O}(x^k)$  als auch  $f(x) \in \mathcal{O}(x^k)$  in äquivalenter Bedeutung.

Noch festlegen: Reihenfolge der Indizes in Ausdrücken wie  $(\text{Sym} \nabla^k \text{ric}^{\bar{g}}|_0)_{ij\alpha}$  in Teil (c) von Proposition 4.10. In diesem Teil anpassen.





# Literaturverzeichnis

- [1] H. W. ALT, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Lehrbuch, Zweite Auflage, Springer 1992.
- [2] B. AMMANN, *Analysis IV*, Vorlesungsskript (unveröffentlicht): Universität Regensburg, 2015. Erhältlich unter [http://www.berndammann.de/lehre/2015s\\_analysisIV/analysisIV.pdf](http://www.berndammann.de/lehre/2015s_analysisIV/analysisIV.pdf).
- [3] B. AMMANN, *Multilineare Algebra*, Handout (unveröffentlicht), Universität Regensburg, 2015. Erhältlich unter [http://www.berndammann.de/lehre/2015s\\_analysisIV/tensor.pdf](http://www.berndammann.de/lehre/2015s_analysisIV/tensor.pdf).
- [4] B. AMMANN, J.-F. GROSJEAN, E. HUMBERT, AND B. MOREL, *A spinorial analogue of Aubin's inequality*, Math. Z., **260** (2008), 127–151.
- [5] B. AMMANN AND E. HUMBERT, *Positive mass theorem for the Yamabe problem on spin manifolds*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 567–576.
- [6] R. ARNOWITT, S. DESER, AND C. W. MISNER, *Energy and the criteria for radiation in general relativity*, Phys. Rev. (2), **118** (1960), 1100–1104.
- [7] R. ARNOWITT, S. DESER, AND C. W. MISNER, *Canonical variables for general relativity*, Phys. Rev. (2), **117** (1960), 1595–1602.
- [8] R. ARNOWITT, S. DESER, AND C. W. MISNER, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity.*, Phys. Rev. (2), **122** (1961), 997–1006.
- [9] T. AUBIN, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire.*, J. Math. Pur. Appl., IX. Ser. **55** (1976), 269–296.
- [10] T. AUBIN, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998
- [11] C. BÄR, *Das Spektrum des Dirac-Operators*, Bonner Math. Schr., **217** (1991).
- [12] C. BÄR, *The Dirac operator on space forms of positive curvature*, J. Math. Soc. Japan **48**, 69–83 (1994)
- [13] C. BÄR, *Differentialgeometrie*, Vorlesungsskript (unveröffentlicht), Universität Potsdam, 2006. Erhältlich unter [http://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user\\_upload/Prof-Geometrie/Dokumente/Lehre/Lehrmaterialien/skript-DiffGeoErw.pdf](http://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Geometrie/Dokumente/Lehre/Lehrmaterialien/skript-DiffGeoErw.pdf)

- [14] C. BÄR, P. GAUDUCHON, A. MOROIANU *Generalized cylinders in semi-riemannian and spin geometry*, Math. Z. **249** (2005), 545–580
- [15] W. BALLMANN, *Einführung in die Geometrie und Topologie*, Birkhäuser, 2015
- [16] R. BARTNIK, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Commun. Pure Appl. Math. **39** (1985), 661–693
- [17] R. BENEDETTI, C. PETRONIO, *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [18] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [BG92] J.-P. BOURGUIGNON, P. GAUDUCHON, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.
- [19] J.-P. BOURGUIGNON, O. HIJAZI, J.-L. MILHORAT, A. MOROIANU, S. MOROIANU, *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*, EMS Monographs in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.
- [20] H. W. BRINKMANN, *Einstein spaces which are mapped conformally on each other*, Math. Ann., **94** (1925), 119–145.
- [21] Cao, Jian Guo: *The existence of generalized isothermal coordinates for higher-dimensional Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 901–920
- [22] Chavel, Isaac: *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and applied mathematics, Academic Press, 1984.
- [23] Chrusciel, Piotr: *Lectures on Mathematical Relativity*, Beijing, July 2006. <https://homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/papers/BeijingAll.pdf>
- [24] do Carmo, Manfredo: *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty
- [25] T. Friedrich, *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg, 1997.
- [26] F. W. GEHRING, *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–391.
- [27] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften no. 224, Springer-Verlag, 1977.
- [28] Günther, Matthias: *Über konforme Abbildungen Riemannscher Räume auf einfach zentralharmonische Räume*, Math. Nachr. **125** (1986), 191–200

- [29] ———: *Conformal normal coordinates*, Ann. Global Anal. Geom. **11** (1993), 173–184
- [30] E. HEBEY, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondations. Paris: Diderot Editeur, 1997
- [31] E. HEBEY, *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **1635**, Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [32] E. HEBEY, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, Courant Lecture Notes in Mathematics **5**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999
- [33] O. HIJAZI, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Comm. Math. Phys., **104** (1986), 151–162.
- [34] O. HIJAZI, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures.*, in Ocampo, Hernan (ed.) et al., Geometric methods for quantum field theory. Proceedings of the summer school, Villa de Leyva, Colombia, July 12–30, 1999. Singapore: World Scientific. 116–169 , 2001.
- [35] N. HITCHIN, *Harmonic spinors*, Adv. Math., **14** (1974), 1–55.
- [36] F. HIRZEBRUCH AND W. SCHARLAU, *Einführung in die Funktionalanalysis*, no. 296 in BI-Hochschultaschenbücher, BI-Wissenschafts-Verlag, 1971.
- [37] R. HOWARD, *Kuiper's theorem on conformally flat manifolds*, wahrscheinlich unveröffentlicht, erhältlich unter <http://ralphhoward.github.io/SemNotes/Notes/conformal.pdf>, 1996
- [38] N. H. KUIPER, *On conformally flat spaces in the large*, Ann. Math. **50** (1949), 916–924.
- [39] W. KÜHNEL, *Conformal transformations between Einstein spaces*, in Conformal geometry (Bonn, 1985/1986), Aspects Math., E12, Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1988, pp. 105–146.
- [40] W. Kühnel: *Differentialgeometrie: Kurven—Flächen—Mannigfaltigkeiten*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999
- [41] Lawson, H. B.; Michelsohn, M.-L.: *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [42] Lee, Dan A.: *Geometric Relativity*, AMS Grad. Studies in Math., vol. 201, Amer. Math. Soc., 2019.
- [43] Lee, John M.: *Introduction to smooth manifolds*, vol. 218 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003
- [44] Lee, John M.; Parker, Thomas H.: *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), 37–91

- [45] Lohkamp, Joachim: *The Higher Dimensional Positive Mass Theorem I*, [arXiv: math/0608795](https://arxiv.org/abs/math/0608795)
- [46] MORIO OBATA, *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **6** (1971/72), pp. 247–258.
- [47] Parker, T.; Taubes, Clifford Henry: *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **84** (1982), 223–238
- [48] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods, second edition*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **395**, Longman, 1998.
- [49] Sambusetti, A.: *Einstein manifolds and obstructions to the existence of Einstein metrics*, Rend. Mat. Appl. (7), **18** (1998), 131–149
- [50] Schoen, Richard: *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*. J. Diff. Geom. **20** (1984), 479–495
- [51] Schoen, Richard: *Topics in Scalar Curvature*, Lecture Notes, written by Chao Li, Spring 2017, available at [http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahjd1/Schoen\\_Topics\\_in\\_scalar\\_curvature\\_2017.pdf](http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahjd1/Schoen_Topics_in_scalar_curvature_2017.pdf)
- [52] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), no. 1, 45–76
- [53] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *Proof of the positive mass theorem II*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), no. 2, 231–260
- [54] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math. **92** (1988), 47–71
- [55] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *Lectures on differential geometry*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, International Press, 1994
- [56] Schoen, Richard; Yau, Shing Tung: *Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities*, Surv. Differ. Geom. 2019, **24**. Part 2: Differential geometry, Calabi-Yau theory, and general relativity, 441–480. Int. Press, Boston.
- [57] Slovák, Jan: *Natural Operators on conformal manifolds*, Dissertation, Masaryk University, Brno, Czechia, 1993, <http://www.math.muni.cz/~slovak/ftp/papers/vienna.ps>
- [58] S. Sulanke, *Die Berechnung des Spektrums des Quadrates des Dirac-Operators auf der Sphäre*, Doktorarbeit, Humboldt-Universität Berlin, 1979
- [59] Trudinger, N. S.: *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., **22** (1968), 265–274

- [60] Warner, F. W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Reprint.*, Graduate Texts in Mathematics, **94**, Springer-Verlag, 1983
- [61] Yamabe, H.: *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds.*, Osaka Math. J., **12** (1960), 21–37
- [62] Werner, D.: *Funktionalanalysis*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2002
- [63] Witten, E., *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys., **80** (1981), 381–402



# Index

## Symbole

$(\cdot, \cdot)$ ,  $L^2$ - oder kanon. Skalarprod. . . . . 79  
 $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ ,  $L^2$ -Skalarprodukt . . . . . 61  
 $(\cdot, \cdot)_{\text{can}, k}$ , kanon. Skalarprodukt . . . . . 79  
 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k, \alpha}}$ , Hölder-Norm . . . . . 46  
 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^k}$ ,  $\mathcal{C}^k$ -Norm . . . . . 45  
 $\|\cdot\|_{H^{-k}}$ , Sobolev-Norm . . . . . 79  
 $\|\cdot\|_{H^k}$ , Sobolev-Norm . . . . . 75  
 $\|\cdot\|_{H^{k, p}}$ , Sobolev-Norm . . . . . 19  
 $\|\cdot\|_{L^p}$ ,  $p \in [1, \infty]$  . . . . . 5  
 $|\cdot|_{\text{eukl}}$ , eukl. Norm . . . . . 129, 146  
 $|\cdot|_g$ , Norm bzgl.  $g$  . . . . . 129, 146  
 $\rightharpoonup$ , konvergiert schwach gegen . . . . . 32  
 $\otimes$ , Kulkarni-Nomizu-Produkt . . . . . 104  
 $\subseteq$ , relativ kompakte Teilmenge . . . . . 66  
 $\subsetneq$ , offene Teilmenge . . . . . 35  
 $\mathcal{C}_b^k(M)$ , Raum der  $C^k$ -beschr.  
Funktionen . . . . . 45  
 $\mathcal{C}^{k, \alpha}(M)$ , lokaler Hölder-Raum . . . . . 46  
 $\mathcal{C}_b^{k, \alpha}(M)$ , Hölder-Raum . . . . . 46  
 $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ , Raum der komp. getr. glatten  
Fktn. . . . . 6  
 $\text{Conf}(M, g)$ , konforme Gruppe . . . . . 108  
 $\not{D}$ , Dirac-Operator . . . . . 194  
 $\mathcal{D}'(M)$ , Distributionen . . . . . 79  
 $\text{EXP}$ , Matrix-Exponentialfunktion . . . . . 159  
 $E^g$ , Energie-Funktional . . . . . 99  
 $H^k(M)$ , Sobolev-Raum . . . . . 75  
 $H^{-\infty}(M) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M)$  . . . . . 79  
 $H^{-k}(M)$ , Dualraum von  $H^k(M)$  . . . . . 78  
 $H^{k, p}(M)$ , Sobolev-Raum . . . . . 19  
 $H^{k, p}(U; T^{(r, s)}M)$ , tensorieller  
Sobolev-Raum . . . . . 36  
 $H^{k, p}(T^{(r, s)}M) = H^{k, p}(M; T^{(r, s)}M)$ ,  
tensorieller Sobolev-Raum . . . . . 36

$\text{Isom}(M, g)$ , Isometriegruppe . . . . . 107  
 $L^*$ , formal adjungierter Operator . . . . . 61  
 $L^p(M, \mu)$ ,  $L^p$ -Raum auf Maßraum . . . . . 5  
 $L^p(U; T^{(r, s)}M) = H^{0, p}(U; T^{(r, s)}M)$ ,  
tensorieller  $L^p$ -Raum . . . . . 36  
 $L^p_{\text{loc}}(M)$ , Raum der lok.  $L^p$ -Funkt. . . . . 7  
 $(\widehat{M}, \widehat{g})$ , Umstülpung von  $(M, g)$  . . . . . 172  
 $\mathcal{P}_m$ , homogene Polynome vom Grad  $m$   
151  
 $Q$ , Yamabe-Funktional . . . . . 98  
 $Q = Q^M$ , Yamabe-Funktional . . . . . 117  
 $Q^g$ , Yamabe-Funktional . . . . . 98 f., 118  
 $Q_s^g$ , verallg. Yamabe-Funktional . . . . . 97, 118  
 $R_4$ ,  $(0, 4)$ -Krümmungstensor . . . . . 106  
 $R_{ijkl}$ , Koeffizienten von  $R$  . . . . . 156  
 $T^{(r, s)}M$ ,  $(r, s)$ -Tensoren . . . . . 227  
 $W$ , Weyl'scher Krümmungstensor . . . . . 106  
 $W_4$ , Weyl'scher  $(0, 4)$ -Krgs.tens. . . . . 106  
 $Y$ , Yamabe-Operator . . . . . 59, 95  
 $[g]$ , konforme Klasse . . . . . 91  
 $\mathbb{N}_0$ , Menge d. natürl. Zah. inkl. 0 . . . . . 247  
 $\mathbb{N}$ , Menge d. natürl. Zah. exkl. 0 . . . . . 247  
 $\mathbb{R}_{>0}$ , Menge d. pos. reellen Zahlen . . . . . 247  
 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , Menge d. nichtneg. re. Zahlen . . . . . 247  
 $a = 4(n - 2)/(n - 2)$  . . . . . 95  
 $\partial_i$ , partielle Ableitung . . . . . 39, 155 f.  
 $d_N$ , Distanz zu  $N$  . . . . . 84, 121  
 $\text{inj}(M, g)$ , Injektivitätsradius einer riem.  
Mgfk. . . . . 43  
 $\text{inj}(x)$ , Injektivitätsradius in  $x$  . . . . . 43  
 $m(N, g)$ , ADM-Masse . . . . . 187  
 $p_c$ , critical exponent  $2n/(n - 2)$  . . . . . 68  
 $\Delta$ , Laplace-Operator . . . . . 39  
 $\Delta_0$ , euklidischer Laplace-Operator . . . . . 151  
 $\Gamma_\Phi$ , Green-Funktion von  $\not{D}$  . . . . . 195  
 $\Gamma_{x_0}$ , Green-Funktion von  $Y$  in  $x_0$  . . . . . 165

- $\mathcal{O}^{(k)}(r^\tau)$ , Asymptotik mit  $k$   
 Ableitungen ..... 166  
 $\Sigma M$ , Spinorbündel ..... 194  
 $\delta$ , Kodifferential ..... 38  
 $\delta_\alpha$ , Dilatation ..... 113  
 $\lambda_s(M, g)$ , subkritische  
 Yamabe-Konstante ..... 118  
 $\mathbb{S}^n = (S^n, g_{\text{sph}})$ , Standard-Sphäre .... 12  
 $\omega_n$ , Volumen von  $\mathbb{S}^n$  ..... 12  
 $\sigma_n$ , Sobolev-Konstante ..... 12  
 Äquivalenz  
 konforme ..... 91
- A**
- Abschätzung  
 elliptische ..... 64  
 elliptische lokale ..... 66  
 lokale Schauder- $\sim$  ..... 66  
 Schauder- $\sim$  ..... 64  
 ADM-Masse ..... 187  
 $\alpha$ -Hölder-stetig ..... 46  
 Arzela–Ascoli, Satz von  $\sim$  ..... 26  
 asymptotisch euklidisch ..... 171  
 asymptotisch euklidische Karte ..... 171  
 Aubin, Satz von  $\sim$  ..... 144  
 Aubin-Ungleichung ..... 125  
 ausgewogen  
 konform ..... 201
- B**
- Bartnik, Satz von  $\sim$  ..... 187
- C**
- $\mathcal{C}^k$ -Norm ..... 45  
 $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ -Norm ..... 46
- D**
- Diffeomorphismus  
 konformer ..... 91  
 Differentialoperator ..... 58  
 auf Vektorbündeln ..... 58  
 skalarer ..... 58
- Dilatation ..... 113  
 Dirac-Operator  
 auf  $M$  ..... 194  
 auf  $\mathbb{R}^n$  ..... 193  
 Distributionen ..... 21, 65, 79  
 Divergenz  
 einer 1-Form ..... 38  
 Divergenzsatz ..... 40
- E**
- eigentlich eingebettet ..... 89  
 Eigenwertgleichung  
 lineare ..... 67  
 nicht-lineare ..... 68  
 Einbettungssatz, Sobolev’scher  
 lokaler ..... 53  
 Teil 1 ..... 23  
 Teil 2 ..... 47  
 Einstein’sche Summenkonvention .... 18  
 Einstein–Hilbert-Funktional ..... 3, 98  
 volumen-normalisiert ..... 98  
 volumen-normalisierte ..... 98  
 Einstein-Metrik ..... 2, 101  
 elliptische Abschätzung ..... 64  
 lokale ..... 66  
 elliptische Regularität  
 globale ..... 64  
 lokale ..... 66
- F**
- fast überall gleich ..... 5  
 folgenkompakt ..... 24  
 formal adjungierter Operator ..... 61  
 formal selbstadjungiert ..... 61  
 Formel  
 Green’sche ..... 42  
 Lichnerowicz–Schrödinger- $\sim$  .... 194
- G**
- Gagliardo–Nirenberg, Lemma von  $\sim$  .. 7  
 Gauß’scher Divergenzsatz ..... 40  
 Gewicht



- einer Seminorm ..... 11  
 eines Hölder-Raums ..... 46  
 eines Sobolev-Raums ..... 19
- Gewichte  
 für Komp. von  $H^{1,q} \rightarrow L^p$  ..... 34  
 in den Sobolev'schen  
 Einbettungssätzen ..... 23, 47  
 in Rellich—Kondrakhov ..... 37, 52  
 gleichgradig stetig ..... 26  
 Graham, Satz von  $\sim$  ..... 156  
 Green'sche Formeln ..... 42  
 Green-Funktion ..... 81  
 für den Yamabe-Operator ..... 165  
 von  $\not{D}$  ..... 195
- H**
- harmonischer Spinor ..... 196  
 Hebbarkeitssatz ..... 84  
 Heine–Borel, Satz von  $\sim$  ..... 26  
 Hölder-Exponent ..... 46  
 Hölder-Norm ..... 46  
 Hölder-Raum ..... 46  
 lokaler ..... 46  
 Hölder-stetig ..... 46  
 Hölder-Ungleichung ..... 5  
 verallgemeinerte ..... 5  
 Hopf–Rinow, Satz von  $\sim$  ..... 26
- I**
- Injektivitätsradius ..... 43  
 Integration, partielle ..... 43  
 integrierbar  
 lokal ..... 7  
 Inversion an der Sphäre ..... 170  
 Isometriegruppe ..... 107  
 isotherme Koordinaten ..... 104
- K**
- kanonische Paarung ..... 79  
 Karte  
 asymptotisch euklidische ..... 171  
 Killing-Vektorfeld ..... 216  
 konformes ..... 216  
 klassische Lösung ..... 63  
 Kodifferential ..... 38  
 kompakt  
 für Abbildungen ..... 32  
 für Mengen ..... 25  
 kompakte Version des Satzes von der  
 positiven Masse ..... 192  
 Kompaktheitssatz von  
 Rellich-Kondrakhov  
 Teil 1 ..... 36  
 Teil 2 ..... 52  
 konform ..... 3, 39, 91  
 konform äquivalent ..... 91  
 lokal ..... 103  
 konform ausgewogen ..... 201  
 konform flach ..... 104  
 konforme Äquivalenz ..... 91  
 konforme Gruppe ..... 108  
 konforme Klasse ..... 3, 91  
 konforme Koordinaten ..... 104  
 konforme Kovarianz von  $\not{D}$  ..... 196  
 konforme Normalkoordinaten ..... 143  
 konformer Diffeomorphismus ..... 91  
 konformer Laplace-Operator ..... 59  
 konformes Killing-Vektorfeld ..... 216  
 Konstante, Yamabe-  $\sim$  ..... 118  
 Konvergenz  
 schwache ..... 32  
 Koordinaten  
 konforme ..... 104  
 Kovarianz  
 konforme ..... 196  
 kritisch ..... 68  
 Kulkarni-Nomizu-Produkt ..... 104
- L**
- $L^2$ -Skalarprodukt ..... 61  
 Laplace-Beltrami-Operator ..... 39  
 Laplace-Operator ..... 39, 59  
 konformer ..... 59, 95  
 Lemma von  
 Aubin ..... 133

Obata.....109  
 Lichnerowicz–Schrödinger-Formel...194  
 Lösung  
   des Yamabe-Problems.....99  
   klassische  $\sim$ .....63  
   schwache  $\sim$ .....63  
   starke  $\sim$ .....63  
 lokal integrierbar.....7  
 lokal konform äquivalent.....103  
 lokaler  $L^p$ -Raum.....7

## M

Maximum-Prinzip, schwaches.....54  
 Modellräume.....102  
 Multiindex.....153

## N

Normalkoordinaten, konforme.....143

## O

Obata  
   Erster Satz von  $\sim$ .....111  
   Lemma von  $\sim$ .....109  
   Zweiter Satz von  $\sim$ .....214  
 Operator  
   formal adjungierter.....61  
   konformer Laplace-.....95  
   Laplace-.....39  
   Yamabe-.....95

## P

Paarung, kanonische.....79  
 partielle Diff'gleichung  
   kritisch.....68  
   subkritisch.....68  
 partielle Integration.....43  
 Poincaré-Ungleichung.....44  
 Positive-Masse-Theorem.....190  
 Positive-masse-Theorem  
   kompakte Version.....192  
 präkompakt.....24

## R

Radius-Funktion  
   einer asymptotisch euklidischen  
     Mannigfaltigkeit.....171  
 Rellich-Kondrakhov, Satz von  $\sim$   
   Teil 1.....36  
   Teil 2.....52  
 Riccikrümmung.....2  
 riemannsches Volumenmaß.....6

## S

Satz von  
   Arzela–Ascoli.....26  
   Aubin.....144  
   Bartnik.....187  
   der positiven Masse.....190  
     kompakte Version.....192  
     nicht-kompakte Version.....193  
   Gauß.....40  
   Graham.....156  
   Heine–Borel.....26  
 Obata  
   Erster.....111  
   Zweiter.....214  
 Rellich-Kondrakhov  
   Teil 1.....36  
   Teil 2.....52  
 Sobolev  
   lokal.....53  
   Teil 1.....23  
   Teil 2.....47  
 Schauder-Abschätzung.....64  
   lokale.....66  
 Schnittkrümmung.....2  
 schwach konvergent.....32, 132  
 schwache Konvergenz.....32  
 schwache Lösung.....63  
   einer nicht-linearen part. DGL...68  
 schwacher Sinn.....63  
 selbstadjungiert, formal.....61  
 Skalarkrümmung.....3  
 Skalarkrümmung  
   totale  $\sim$ .....98

## Skalarprodukt

 $H^{-k}$ -Skalarprodukt ..... 79 $L^2$ -Skalarprodukt ..... 61

kanonisches ..... 79

## Sobolev'scher Einbettungssatz

lokaler ..... 53

Teil 1 ..... 23

Teil 2 ..... 47

Sobolev-Konstante ..... 12

Sobolev-Norm ..... 19

für  $k < 0$  ..... 79

Sobolev-Raum ..... 19

für  $k < 0$  ..... 79

## Sphären-Wachstumsfunktion

relative ..... 180

Spin-Mannigfaltigkeit ..... 194

Spinorbündel ..... 194

## Spinoren

auf  $\mathbb{R}^n$  ..... 193auf  $M$  ..... 194

starke Lösung ..... 63

starker Sinn ..... 63

stereografische Projektion ..... 103, 111

strikte Ungleichung von Aubin ..... 144

subkritisch ..... 68

**T**

Tensoren ..... 227

## Theorem

Positive-Masse- $\sim$  ..... 165, 190**U**

überdeckungskompakt ..... 24

Umstülpabbildung ..... 170

Umstülpung ..... 172

USA, Umstülpabbildung ..... 170

**V**

volumen-normalisierte

Einstein-Hilbert-Funktional ..... 98

Volumenmaß, riemannsches ..... 6

**W**

Weyl'scher Krümmungstensor

Formel für den  $\sim$  ..... 106**Y**

Yamabe-Funktional ..... 98 f.

subkritisches ..... 118

Yamabe-Konstante ..... 118

subkritische ..... 118

Yamabe-Metrik ..... 142

Yamabe-Operator ..... 59, 95

Yamabe-Problem ..... 3

**Z**

Zusammenhangs-Laplace-Operator .. 62

auf  $k$ -Formen ..... 62